Einführung in die Theorie der Kleinschen Gruppen

Katharina und Lutz Habermann

Juli 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorbereitungen

1.1 Grundlagen aus der komplexen Analysis

Im folgenden sei U eine offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene. Für $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ sei

$$\begin{aligned} B_r(z_0) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}, \\ \overline{B_r(z_0)} &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\} \quad \text{und} \\ S_r(z_0) &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}. \end{aligned}$$

Dabei sei $S_r(z_0)$ positiv, d.h. entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn orientiert.

Definition 1.1.1 *Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ heißt holomorphe Funktion, falls f an jeder Stelle $z \in U$ komplex differenzierbar ist, d.h., falls*

$$f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

für jedes $z \in U$ existiert.

Für eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ bezeichne $f^{(n)}$ die n-te komplexe Ableitung von f. Insbesondere ist $f^{(0)} = f$ und $f^{(1)} = f'$.

Satz 1.1.2 (Cauchysche Integralformel) *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist $\overline{B_r(z_0)} \subseteq U$, so gilt*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \quad \textit{für} \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

□

Bemerkung 1.1.3 Mittels der Parametrisierung $\varphi : t \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in S_r(z_0)$ erhält man, daß

$$\int_{S_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z = \mathrm{i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}tn}} \, \mathrm{d}t .$$

□

Aus Satz 1.1.2 erhält man unmittelbar

Folgerung 1.1.4 (Cauchysche Abschätzung) *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{B_r(z_0)} \subseteq U$. Dann gilt*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \max\{|f(z)| : z \in S_r(z_0)\}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. □

Satz 1.1.5 (Satz von Liouville) *Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.*

Beweis. Da f beschränkt ist, ist

$$M := \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\} < \infty\,.$$

Da f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, impliziert die Cauchysche Abschätzung für $n = 1$, daß

$$\left|f'(z)\right| \leq \frac{M}{r} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ und alle } r > 0\,.$$

Also ist $f' \equiv 0$ und somit f konstant. □

Bemerkung 1.1.6 Nach Weierstrass heißen holomorphe Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganze Funktionen. □

Satz 1.1.7 (Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor) *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und sei $B_r(z_0) \subseteq U$. Dann konvergiert die Taylor-Reihe von f um z_0, d.h. die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \textit{mit} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

auf $B_r(z_0)$, und es gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \textit{für alle } z \in B_r(z_0).$$

□

Satz 1.1.8 (Identitätssatz) *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend und offen, und seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Hat die Menge $\{z \in U : f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in U, so gilt $f = g$.* □

Satz 1.1.9 (Gutzmersche Formel) *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $s > 0$. Dann gilt für r mit $0 < r < s$:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2 \, \mathrm{d}t \leq \left(\max\{|f(z)| : z \in S_r(z_0)\}\right)^2\,.$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß für $m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(n-m)}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ 2\pi & \text{für } m = n \end{cases}$$

Da

$$f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}tn}$$

und da diese Reihe gleichmäßig in t konvergiert, folgt

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tm}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(n-m)}\,\mathrm{d}t = 2\pi a_m r^m\,. \tag{1.1.1}$$

Weiter ist

$$|f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2 = f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\overline{f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n r^n\, f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tn}\,.$$

Da diese Reihe wiederum gleichmäßig in t konvergiert, können wir mittels (1.1.1)

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n r^n \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tn}\,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

ableiten.

Die Abschätzung

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2\,\mathrm{d}t \leq 2\pi \left(\max\{|f(z)| : z \in S_r(z_0)\}\right)^2$$

ist trivial. □

Satz 1.1.10 (Maximumprinzip) *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend und offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Hat $|f|$ in $z_0 \in U$ ein lokales Maximum, d.h., existiert eine Umgebung $U_0 \subseteq U$ von z_0 mit*

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \text{für alle } z \in U_0, \tag{1.1.2}$$

so ist f konstant.

Beweis. Da f holomorph ist, können wir f nach Satz 1.1.7 in einer Umgebung von z_0 als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

darstellen. Nach Satz 1.1.9 gilt dann für kleine $r > 0$

$$|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq \left(\max\{|f(z)| : z \in S_r(z_0)\}\right)^2\,.$$

Andererseits folgt aus (1.1.2), daß

$$|a_0| \geq \max\{|f(z)| : z \in S_r(z_0)\}\,.$$

Somit muß

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 0$$

gelten, was wiederum

$$a_n = 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

impliziert. Wir erhalten, daß

$$f(z) = a_0 \quad \text{für } z \in B_r(z_0).$$

Da U zusammenhängend ist, folgt mit Hilfe von Satz 1.1.8, daß

$$f \equiv a_0 \quad \text{auf } U.$$

□

Sei $z_0 \in U$, und sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph.

Definition 1.1.11 *z_0 heißt hebbare Singularität von f, falls f zu einer holomorphen Funktion auf U fortgesetzt werden kann.*

z_0 heißt Pol von f, falls z_0 keine hebbare Singularität ist und ein solches $n \in \mathbb{N}$ existiert, daß die Funktion $(z - z_0)^n f(z)$ holomorph auf U fortgesetzt werden kann.

Ist z_0 weder eine hebbare Singularität noch ein Pol von f, so heißt z_0 wesentliche Singularität von f.

Satz 1.1.12 (Hebbarkeitssatz) *z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität der holomorphen Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, wenn es eine solche Umgebung $U_0 \subseteq U$ von z_0 gibt, daß f auf $U_0 \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist.* □

Satz 1.1.13 (Satz von Casorati-Weierstrass) *Sei $z_0 \in U$, und sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist z_0 eine wesentliche Singularität von f, so existiert zu jedem $a \in \mathbb{C}$ eine Folge (z_n) in $U \setminus \{z_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = a$.*

Beweis. Wir nehmen an, daß die Aussage falsch ist. Dann existieren ein $a \in \mathbb{C}$, eine Umgebung $U_0 \subseteq U$ von z_0 und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|f(z) - a| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in U_0 \setminus \{z_0\}.$$

Wir setzen

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a}.$$

Dann ist g holomorph und beschränkt auf $U_0 \setminus \{z_0\}$. Also ist z_0 nach Satz 1.1.12 eine hebbare Singularität von g. Dies impliziert im Widerspruch zur Voraussetzung, daß

$$f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$$

im Fall $\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$ eine hebbare Singularität und im Fall $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$ einen Pol in z_0 hat. □

1.2 Gruppen

Definition 1.2.1 *Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \cdot)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge G und einer binären Operation*

$$(g_1, g_2) \in G \times G \mapsto g_1 \cdot g_2 \in G$$

mit:

(i) Für alle $g_1, g_2, g_3 \in G$ gilt

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 .$$

(ii) Es existiert ein Element $e \in G$ mit der Eigenschaft, daß

$$e \cdot g = g \cdot e = g \quad \textit{für alle } g \in G.$$

(iii) Zu jedem $g \in G$ existiert ein Element $g^{-1} \in G$ mit

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e .$$

e wird neutrales oder Einselement von G genannt, g^{-1} heißt inverses Element von g.

Bemerkung 1.2.2 (i) Für eine Gruppe $(G, \cdot)$ sind das Einselement e und das inverse Element g^{-1} von $g \in G$ eindeutig bestimmt.

(ii) Statt $g_1 \cdot g_2$ werden wir häufig $g_1 g_2$ schreiben. $\square$

Beispiel 1.2.3 $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\mathrm{U}(1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ sind mit der Multiplikation als binäre Operation Gruppen. $\square$

Beispiel 1.2.4 Die bijektiven Abbildungen $f : X \to X$ bilden zusammen mit der Verknüpfung von Abbildungen, d.h. mit $f_1 \cdot f_2 := f_1 \circ f_2$, wobei

$$f_1 \circ f_2(x) := f_1(f_2(x)) \quad \text{für } x \in X,$$

eine Gruppe. $\square$

Lemma 1.2.5 *Die Menge*

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \ \textit{und} \ ad - bc = 1 \right\}$$

ist mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe.

Beweis. Die Eigenschaft (i) aus Definition 1.2.1 erhält man durch direktes Nachrechnen. Außerdem sieht man sofort, daß mit

$$e := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Bedingung (ii) erfüllt wird. Schließlich ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) .$$

$\square$

Definition 1.2.6 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heißt Untergruppe von $(G, \cdot)$, falls folgendes gilt:*

(i) Sind $g_1, g_2 \in H$, so ist auch $g_1 \cdot g_2 \in H$.

(ii) Ist $g \in H$, so ist auch $g^{-1} \in H$.

Bemerkung 1.2.7 Ist H eine Untergruppe von $(G, \cdot)$, so ist H mit der Einschränkung der binären Operation $\cdot$ auf H eine Gruppe. □

Beispiel 1.2.8 Die Menge

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } ad - bc = 1 \right\}$$

ist eine Untergruppe von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. □

Definition 1.2.9 *Eine Abbildung $f : G \to H$ zwischen Gruppen G und H heißt Gruppenhomomorphismus, falls*

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2) \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in G$$

gilt.

Beispiel 1.2.10 Die Abbildungen

$$z \in \mathrm{U}(1) \mapsto z^n \in \mathrm{U}(1)$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und

$$z \in \mathrm{U}(1) \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

sind Gruppenhomomorphismen. □

Kapitel 2

Möbius-Transformationen

2.1 Die Automorphismen der Riemannschen Zahlenkugel

Sei $\hat{\mathbb{C}}$ die disjunkte Vereinigung von $\mathbb{C}$ und $\{\infty\}$, $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Mittels stereographischer Projektion können wir $\hat{\mathbb{C}}$ als Riemannsche Zahlenkugel verstehen. Ist nämlich S^2 die Einheitssphäre in $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$, d.h.

$$S^2 := \{(\zeta, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |\zeta|^2 + \xi^2 = 1\}\,,$$

so wird durch

$$\sigma(\zeta, \xi) := \begin{cases} \dfrac{\zeta}{1-\xi} & \text{für } (\zeta,\xi) \neq (0,1) \\ \infty & \text{für } (\zeta,\xi) = (0,1) \end{cases}$$

eine bijektive Abbildung $\sigma : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ definiert. Die inverse Abbildung von σ ist durch

$$\sigma^{-1}(z) := \begin{cases} \left(\dfrac{2z}{|z|^2+1}, \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right) & \text{für } z \in \mathbb{C} \\ (0,1) & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

gegeben.

Wir definieren die Abbildung $s : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ durch

$$s(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{z} & \text{für } z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } z = \infty \\ \infty & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

Offensichtlich ist $s \circ s = \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ und folglich $s^{-1} = s$.

Um von stetigen Abbildungen $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ reden zu können, führen wir folgendermaßen einen Konvergenzbegriff auf $\hat{\mathbb{C}}$ ein.

Definition 2.1.1 *Eine Folge (z_n) in $\hat{\mathbb{C}}$ konvergiert gegen $z \in \hat{\mathbb{C}}$, falls die Folge $(\sigma^{-1}(z_n))$ in S^2 gegen $\sigma^{-1}(z)$ konvergiert, d.h., falls*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sigma^{-1}(z) - \sigma^{-1}(z_n)\right| = 0\,.$$

Bemerkung 2.1.2 Da die Einschränkung

$$\sigma\big|_{S^2\setminus\{(0,1)\}} : S^2 \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{C}$$

von σ auf $S^2 \setminus \{(0,1)\}$ ein Homöomorphismus ist, verallgemeinert Definition 2.1.1 den Konvergenzbegriff von $\mathbb{C}$, d.h., eine Folge (z_n) in $\mathbb{C} \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ konvergiert genau dann gegen $z \in \mathbb{C}$ im Sinne von Definition 2.1.1, wenn

$$\lim_{n\to\infty} |z - z_n| = 0\,.$$

Außerdem sieht man, daß eine Folge (z_n) komplexer Zahlen z_n genau dann gegen $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ konvergiert, wenn

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty\,.$$

□

Definition 2.1.3 *Sei $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ stetig.*

(i) Ist $z \in \mathbb{C}$ und $f(z) \in \mathbb{C}$, so heißt f komplex differenzierbar in z, falls

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert. Ist $z \in \mathbb{C}$ und $f(z) = \infty$, so heißt f komplex differenzierbar in z, falls $s \circ f$ in z komplex differenzierbar ist. f heißt komplex differenzierbar in ∞, falls $f \circ s$ komplex differenzierbar in 0 ist.

(ii) f heißt holomorph, falls f in jedem $z \in \hat{\mathbb{C}}$ komplex differenzierbar ist.

Bemerkung 2.1.4 Nach Definition 2.1.3 ist $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ genau dann eine holomorphe Abbildung, wenn

$$\begin{aligned}
&f\big|_{\mathbb{C}\cap f^{-1}(\mathbb{C})} : \mathbb{C} \cap f^{-1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}\,,\\
&s \circ f\big|_{\mathbb{C}\cap f^{-1}(\hat{\mathbb{C}}^*)} : \mathbb{C} \cap f^{-1}(\hat{\mathbb{C}}^*) \to \mathbb{C}\,,\\
&f \circ s\big|_{\mathbb{C}\cap s\circ f^{-1}(\mathbb{C})} : \mathbb{C} \cap s \circ f^{-1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \quad \text{und}\\
&s \circ f \circ s\big|_{\mathbb{C}\cap s\circ f^{-1}(\hat{\mathbb{C}}^*)} : \mathbb{C} \cap s \circ f^{-1}(\hat{\mathbb{C}}^*) \to \mathbb{C}\,,
\end{aligned}$$

wobei $\hat{\mathbb{C}}^* := \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, holomorphe Funktionen sind. Insbesondere ist s eine holomorphe Abbildung. □

Wir setzen jetzt

$$\operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) := \{f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} : f \text{ ist bijektiv und } f \text{ und } f^{-1} \text{ sind holomorph}\}\,.$$

Bemerkung 2.1.5 Da die Verknüpfung holomorpher Abbildungen wieder holomorph ist, ist $\operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ mit der Verknüpfung eine Gruppe. $\operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ wird Gruppe der holomorphen Transformationen von $\hat{\mathbb{C}}$ oder Automorphismengruppe von $\hat{\mathbb{C}}$ genannt. □

Im Rest dieses Abschnitts wollen wir $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ explizit beschreiben, d.h., wir wollen alle Elemente von $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ auflisten.

Sei

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})\,.$$

Wir definieren eine stetige Abbildung $L_\gamma : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ durch

$$L_\gamma(z) := \frac{az+b}{cz+d}\,. \tag{2.1.1}$$

Zunächst ist die rechte Seite von (2.1.1) nur definiert, wenn $z \in \mathbb{C}$ und $cz+d \neq 0$. Ist $cz+d = 0$, so ist $az+b \neq 0$, denn sonst wäre

$$ad - bc = acz + ad - acz - bc = a(cz+d) - c(az+b) = 0$$

im Widerspruch zu $ad - bc = 1$. Also impliziert die Forderung, daß L_γ stetig sein soll, daß

$$L_\gamma(z) = \infty\,, \quad \text{falls } cz+d = 0.$$

Aus der Stetigkeit von L_γ folgt außerdem, daß

$$L_\gamma(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{z\to\infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}}$$

und somit

$$L_\gamma(\infty) = \begin{cases} \dfrac{a}{c} & \text{falls } c \neq 0 \\ \infty & \text{falls } c = 0 \end{cases}$$

Bemerkung 2.1.6 Die oben definierten Abbildungen werden Möbius-Transformationen genannt. □

Lemma 2.1.7 *Für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ gilt*

$$L_{\gamma_1\gamma_2} = L_{\gamma_1} \circ L_{\gamma_2}\,.$$

Beweis. Sei

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} L_{\gamma_1} \circ L_{\gamma_2}(z) &= L_{\gamma_1}\left(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}\right) \\ &= \frac{a_1\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + b_1}{c_1\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + d_1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a_1(a_2z+b_2)+b_1(c_2z+d_2)}{c_1(a_2z+b_2)+d_1(c_2z+d_2)} \\
&= \frac{(a_1a_2+b_1c_2)z+a_1b_2+b_1d_2}{(c_1a_2+d_1c_2)z+c_1b_2+d_1d_2} \\
&= L_{\gamma_1\gamma_2}(z)\,.
\end{aligned}
$$

□

Satz 2.1.8 *Für alle $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ ist $L_\gamma \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.*

Beweis. Für jedes $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ ist L_γ bijektiv. Nach Lemma 2.1.7 ist nämlich $L_{\gamma^{-1}}$ die inverse Abbildung zu L_γ. Demzufolge müssen wir nur noch zeigen, daß L_γ für jedes

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$$

holomorph ist. Dies folgt aber aus Bemerkung 2.1.4 und der Tatsache, daß die Einschränkungen von

$$L_\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad s \circ L_\gamma(z) = \frac{cz+d}{az+b}\,, \quad L_\gamma \circ s(z) = \frac{bz+a}{dz+c} \quad \text{und} \quad s \circ L_\gamma \circ s(z) = \frac{dz+c}{bz+a}$$

auf $\mathbb{C}$ rationale Funktionen sind. □

Aus Satz 2.1.8 folgt insbesondere, daß jede Abbildung

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \alpha z \in \mathbb{C}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$ zu einem Automorphismus von $\hat{\mathbb{C}}$ fortgesetzt werden kann. Setzen wir nämlich

$$\gamma := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a^2 = \alpha,$$

so ist $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ und

$$L_\gamma(z) = a^2 z = \alpha z\,.$$

Umgekehrt haben wir

Lemma 2.1.9 *Sei $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ mit $f(0) = 0$ und $f(\infty) = \infty$. Dann existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$ mit*

$$f(z) = \alpha z \quad \textit{für } z \in \mathbb{C},$$

d.h., es ist

$$f = L_\gamma \quad \textit{mit} \quad \gamma := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad \textit{für ein } a \in \mathbb{C}^*.$$

Beweis. Wegen $f(\infty) = \infty$ ist $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Die Einschränkung von f auf $\mathbb{C}$ ist also eine bijektive holomorphe Funktion von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$, deren inverse Funktion ebenfalls holomorph ist. Sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

die Potenzreihenentwicklung von f in 0. Dann ist $a_0 = f(0) = 0$. Da

$$f'(0) = f'\left(f^{-1}(0)\right) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(0)},$$

gilt außerdem $a_1 = f'(0) \neq 0$. Also wird durch

$$F(z) := \frac{f(z)}{z}$$

eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$F(0) = a_1 \neq 0 \tag{2.1.2}$$

definiert. Da für $\tilde{f} := s \circ f \circ s$ ebenfalls $\tilde{f}(0) = 0$ und $\tilde{f}(\infty) = \infty$ gilt, können wir analog schließen, daß

$$\tilde{F}(z) := \frac{\tilde{f}(z)}{z}$$

eine holomorphe Abbildung $\tilde{F} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\tilde{F}(0) \neq 0 \tag{2.1.3}$$

liefert.

Für $z \in \mathbb{C}^*$ haben wir

$$F(z) = \frac{f(z)}{z} = \frac{f \circ s\left(\frac{1}{z}\right)}{z} = \frac{\frac{1}{z}}{s \circ f \circ s\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\tilde{F}\left(\frac{1}{z}\right)}. \tag{2.1.4}$$

Aus (2.1.3) und (2.1.4) folgt, daß

$$\lim_{z \to \infty} |F(z)| = \lim_{z \to \infty} \left| \frac{1}{\tilde{F}\left(\frac{1}{z}\right)} \right| = \lim_{w \to 0} \left| \frac{1}{\tilde{F}(w)} \right| = \left| \frac{1}{\tilde{F}(0)} \right| < \infty .$$

Also ist die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist dann F konstant $\alpha \in \mathbb{C}$ und somit

$$f(z) = \alpha z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Wegen (2.1.2) gilt schließlich $\alpha \neq 0$. □

Lemma 2.1.10 *Für alle $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$ existiert ein $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ mit*

$$L_\gamma(z) = w . \tag{2.1.5}$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß $w = 0$. Dann gilt (2.1.5) für

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

falls $z \in \mathbb{C}$, und für

$$\gamma := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},$$

falls $z = \infty$.

Sei nun $w \in \hat{\mathbb{C}}$ beliebig. Wie wir eben gesehen haben, existieren $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ mit $L_{\gamma_1}(z) = 0$ und $L_{\gamma_2}(w) = 0$. Wir setzen $\gamma := \gamma_2^{-1}\gamma_1$ und schließen mit Hilfe von Lemma 2.1.7, daß

$$L_\gamma(z) = L_{\gamma_2}^{-1} L_{\gamma_1}(z) = L_{\gamma_2}^{-1}(0) = w\,.$$

□

Die Hauptaussage dieses Abschnitts ist

Satz 2.1.11 *Die Automorphismengruppe* $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ *von* $\hat{\mathbb{C}}$ *stimmt mit der Gruppe der Möbius-Transformationen überein.*

Beweis. Aufgrund von Satz 2.1.8 genügt es zu zeigen, daß zu jedem $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ ein $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ mit $f = L_\gamma$ existiert.

Sei also $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, und sei $w := f(\infty)$. Wir wenden Lemma 2.1.10 an und wählen $\gamma_1 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ derart, daß $L_{\gamma_1}(\infty) = w$. Folglich gilt

$$L_{\gamma_1}^{-1} \circ f(\infty) = \infty\,.$$

Sei $z := f^{-1} \circ L_{\gamma_1}(0)$. Für

$$\gamma_2 := \begin{pmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

haben wir dann

$$L_{\gamma_2}(z) = 0 \quad \text{und} \quad L_{\gamma_2}(\infty) = \infty\,,$$

woraus die Beziehungen

$$L_{\gamma_1}^{-1} \circ f \circ L_{\gamma_2}^{-1}(0) = L_{\gamma_1}^{-1} \circ f(z) = 0 \quad \text{und} \quad L_{\gamma_1}^{-1} \circ f \circ L_{\gamma_2}^{-1}(\infty) = L_{\gamma_1}^{-1} \circ f(\infty) = \infty$$

folgen. Somit können wir Lemma 2.1.9 auf $L_{\gamma_1}^{-1} \circ f \circ L_{\gamma_2}^{-1} \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ anwenden und erhalten, daß

$$L_{\gamma_1}^{-1} \circ f \circ L_{\gamma_2}^{-1} = L_{\gamma_3} \quad \text{mit} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{für ein } a \in \mathbb{C}^*.$$

Also ist

$$f = L_{\gamma_1} \circ L_{\gamma_3} \circ L_{\gamma_2} = L_{\gamma_1\gamma_3\gamma_2}\,.$$

□

Unsere bisherigen Überlegungen (vgl. Lemma 2.1.7, Satz 2.1.8 und Satz 2.1.11) zeigen, daß die Abbildung

$$\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \mapsto L_\gamma \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist. Für diesen Homomorphismus gilt außerdem

Lemma 2.1.12 *Für* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ *ist* $L_{\gamma_1} = L_{\gamma_2}$ *genau dann, wenn* $\gamma_1 = \pm\gamma_2$.

Beweis. Aufgrund von Lemma 2.1.7 gilt $L_{\gamma_1} = L_{\gamma_2}$ dann und nur dann, wenn $L_{\gamma_1\gamma_2^{-1}} = \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$. Also genügt es zu zeigen, daß für $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ die Relation $L_\gamma = \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ zu

$$\gamma = \pm e \quad \text{mit} \quad e := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

äquivalent ist.

Sei

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\,.$$

Ist $L_\gamma = \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$, so gilt

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

und somit

$$az + b = (cz+d)z\,, \quad \text{d.h.} \quad cz^2 + (d-a)z - b = 0 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Daraus folgt

$$c = b = 0 \quad \text{und} \quad a = d\,.$$

Nutzen wir nun $ad - bc = 1$, so haben wir außerdem

$$a^2 = 1\,, \quad \text{d.h.} \quad a = \pm 1\,.$$

Also ist $\gamma = \pm e$.

Ist umgekehrt $\gamma = \pm e$, so gilt offensichtlich $L_\gamma = \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$. $\square$

2.2 Die Automorphismen der komplexen Ebene

Definition 2.2.1 *Für eine offene und zusammenhängende Teilmenge U von $\mathbb{C}$ sei*

$$\mathrm{Aut}(U) := \{f : U \to U : f \text{ ist bijektiv und } f \text{ und } f^{-1} \text{ sind holomorphe Funktionen}\}.$$

Die Elemente von $\mathrm{Aut}(U)$ *werden holomorphe Transformationen oder Automorphismen von U genannt.*

`Man kann diese Definition für` $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ `formulieren, wenn man in Definition 2.1.3 Abbildungen` $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ `zuläßt.`

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Ist $\hat{f} \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ mit $\hat{f}(\infty) = \infty$, so ist die Einschränkung von $\hat{f}$ auf $\mathbb{C}$ ein Element von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Wir werden zeigen, daß man auf diese Weise alle Elemente von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ erhält.

Satz 2.2.2 *Ist* $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, *so ist f eine affine Transformation, d.h. von der Gestalt*

$$f(z) = \alpha z + \beta \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{C}^* \text{ und } \beta \in \mathbb{C}. \tag{2.2.1}$$

Beweis. Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Wir zeigen zunächst, daß 0 keine wesentliche Singularität der durch

$$\tilde{f}(z) := f(s(z))$$

definierten holomorphen Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ ist.

Dazu nehmen wir an, daß 0 eine wesentliche Singularität von $\tilde{f}$ ist. Nach dem Satz von Casorati-Weierstrass existiert dann eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}^*$ mit

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(z_n) = f(0).$$

Da die Folge (z_n) als konvergente Folge auch beschränkt ist, haben wir

$$|z_n| \le M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und ein } M > 0.$$

Es folgt, daß

$$\tilde{f}(z_n) \in A_M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei

$$A_M := f\left(\left\{z \in \mathbb{C} : |z| \ge \frac{1}{M}\right\}\right).$$

Da f injektiv ist, ist

$$A_M = \left(f^{-1}\right)^{-1}\left(\left\{z \in \mathbb{C} : |z| \ge \frac{1}{M}\right\}\right).$$

Dies und die Stetigkeit von f^{-1} implizieren, daß A_M eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Demzufolge muß

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(z_n) \in A_M$$

gelten. Das widerspricht aber der Tatsache, daß f bijektiv ist. Damit haben wir gezeigt, daß 0 eine hebbare Singularität oder ein Pol von $\tilde{f}$ ist.

Nach dem Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor ist f eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe, also

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dann ist

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^*.$$

Da 0 keine wesentliche Singularität von $\tilde{f}$ ist, existiert ein solches $k_0 \in \mathbb{N}_0$, daß sich die Abbildung

$$z \in \mathbb{C}^* \mapsto z^k \tilde{f}(z) \in \mathbb{C}$$

für jedes $k \geq k_0$ holomorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzen läßt. Folglich ist

$$\int_{S_1(0)} z^k \tilde{f}(z)\, \mathrm{d}z = 0 \quad \text{für } k \geq k_0.$$

`Dies gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz. Man erhält diese Aussage aber auch, indem man die Cauchysche Integralformel für` $n = 0$ `auf die Funktion` $z^{k+1}\tilde{f}(z)$ `anwendet.`

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \int_{S_1(0)} z^k \tilde{f}(z)\, \mathrm{d}z &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{S_1(0)} z^{k-n}\, \mathrm{d}z \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{i} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(k+1-n)}\, \mathrm{d}t \\ &= 2\pi\mathrm{i}\, a_{k+1}\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten, daß

$$a_k = 0 \quad \text{für } k > k_0$$

und somit f ein Polynom ist. Nehmen wir o.B.d.A. $a_{k_0} \neq 0$ an, so haben wir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k_0} a_n z^n = a_{k_0} \prod_{n=1}^{k_0} (z - b_n)\,.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $k_0 = 1$. Wäre $k_0 = 0$, so wäre f konstant und somit nicht injektiv. Andererseits würde aus $k_0 \geq 2$ aufgrund der Injektivität von f

$$b_1 = \ldots = b_{k_0} \quad \text{und somit} \quad f'(b_1) = 0$$

folgen. Da auch f^{-1} holomorph ist, gilt aber

$$f'(b_1) \cdot \left(f^{-1}\right)'(f(b_1)) = 1 \quad \text{und somit} \quad f'(b_1) \neq 0\,.$$

□

Da offensichtlich jede affine Transformation von $\mathbb{C}$ auch eine holomorphe Transformation von $\mathbb{C}$ ist, haben wir

Folgerung 2.2.3 Aut($\mathbb{C}$) *stimmt mit der Gruppe der affinen Transformationen von* $\mathbb{C}$ *überein.*

Bemerkung 2.2.4 (i) Mit nur wenig mehr Aufwand läßt sich zeigen, daß bereits jede injektive holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ affin ist. `[vgl. Remmert: Funktionentheorie 1, Abschnitt 10.2.2]`

(ii) Satz 2.2.2 impliziert Lemma 2.1.9. Ist nämlich $\hat{f} \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ mit $\hat{f}(\infty) = \infty$ und $\hat{f}(0) = 0$, so ist die Einschränkung f von $\hat{f}$ auf $\mathbb{C}$ ein Element von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Also hat f nach Satz 2.2.2 die Gestalt (2.2.1). Dabei muß $\beta = 0$ gelten, da wir zusätzlich $f(0) = 0$ haben. □

Sei $\mathrm{Aut}_\infty(\hat{\mathbb{C}})$ die Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, die von den Automorphismen gebildet wird, die ∞ als Fixpunkt haben, also

$$\mathrm{Aut}_\infty(\hat{\mathbb{C}}) := \{\hat{f} \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) : \hat{f}(\infty) = \infty\}\,.$$

Satz 2.2.5 *Die Abbildung*

$$\hat{f} \in \mathrm{Aut}_\infty(\hat{\mathbb{C}}) \mapsto \hat{f}\big|_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$$

ist ein Isomorphimus (d.h. ein bijektiver Gruppenhomomorphismus).

Beweis. Offensichtlich ist die angegebene Abbildung ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Es bleibt zu zeigen, daß die Abbildung auch surjektiv ist. Sei also $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Nach Satz 2.2.2 gilt dann (2.2.1). Setzen wir

$$\gamma := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a^2 = \alpha \quad \text{und} \quad b = \frac{\beta}{a}\,,$$

so ist $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ und

$$f = L_\gamma\big|_{\mathbb{C}}\,.$$

□

2.3 Die Automorphismen der Einheitskreisscheibe und der oberen Halbebene

Bezeichne D die Einheitskreisscheibe und H die obere Halbebene von $\mathbb{C}$, also

$$D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \quad \text{und} \quad H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}\,.$$

Wie üblich sei

$$S^1 := S_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}\,.$$

Wir beginnen mit der Berechnung von $\operatorname{Aut}(D)$. Dafür benutzen wir das Schwarzsche Lemma.

Satz 2.3.1 (Schwarzsches Lemma) *Sei $f : D \to D$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Dann gilt*

$$|f(z)| \le |z| \quad \textit{für alle } z \in D \quad \textit{und} \quad |f'(0)| \le 1\,.$$

Gibt es wenigstens einen Punkt $z_0 \in D \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung um 0, d.h., es gibt ein $\alpha \in S^1$ mit

$$f(z) = \alpha z \quad \textit{für alle } z \in D.$$

Beweis. Nach dem Entwicklungssatz von Cauchy-Taylor ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für } z \in D.$$

Wegen $f(0) = 0$ ist $a_0 = 0$. Also wird durch

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} \quad \text{für } z \in D \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad g(0) = f'(0) = a_1$$

eine holomorphe Funktion $g : D \to \mathbb{C}$ definiert. Da $|f(z)| < 1$ für jedes $z \in D$, gilt

$$\max\{|g(z)| : z \in S_r(0)\} \le \frac{1}{r}$$

für jede positive reelle Zahl $r < 1$. Aus dem Maximumprinzip folgt dann, daß

$$\max\{|g(z)| : z \in \overline{B_r(0)}\} \le \frac{1}{r}\,.$$

Wäre nämlich

$$\max\{|g(z)| : z \in \overline{B_r(0)}\} > \max\{|g(z)| : z \in S_r(0)\}\,, \tag{2.3.1}$$

so hätte $|g|$ in einem Punkt $z_1 \in B_r(0)$ ein lokales Maximum und wäre nach dem Maximumprinzip im Widerspruch zur Annahme (2.3.1) konstant. Indem wir r gegen 1 streben lassen, erhalten wir, daß

$$|g(z)| \le 1 \quad \text{für alle } z \in D$$

und somit

$$|f(z)| \le |z| \quad \text{für alle } z \in D \quad \text{und} \quad |f'(0)| = |g(0)| \le 1\,.$$

Ist $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in D \setminus \{0\}$, so ist

$$|g(0)| = 1 \quad \text{oder} \quad |g(z_0)| = 1\,. \tag{2.3.2}$$

Folglich nimmt $|g|$ in D ein Maximum an. Nach dem Maximumprinzip ist dann g konstant $\alpha \in \mathbb{C}$ und somit

$$f(z) = \alpha z \quad \text{für alle } z \in D.$$

Benutzen wir nochmals (2.3.2), so erhalten wir $\alpha \in S^1$. $\square$

Für die Automorphismen von D ergibt sich

Folgerung 2.3.2 *Jeder Automorphimus $f \in \mathrm{Aut}(D)$ mit $f(0) = 0$ ist eine Drehung um* 0.

Beweis. Ist $f \in \mathrm{Aut}(D)$ mit $f(0) = 0$, so liefert die Anwendung des Schwarzschen Lemmas auf f und f^{-1}, daß

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{und} \quad |z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)| \quad \text{für alle } z \in D.$$

Es gilt also stets $|f(z)| = |z|$, woraus wiederum mit Hilfe des Schwarzschen Lemmas

$$f(z) = \alpha z \quad \text{für alle } z \in D \text{ und ein } \alpha \in S^1$$

folgt. $\square$

Sei

$$\mathrm{SU}(1,1) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \text{ und } |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}.$$

Lemma 2.3.3 $\mathrm{SU}(1,1)$ *ist eine Untergruppe von* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Beweis. Offensichtlich ist $\mathrm{SU}(1,1) \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Sei

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ \bar{b}_j & \bar{a}_j \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1,1) \quad \text{für } j = 1, 2.$$

Dann liegen auch

$$\gamma_j^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a}_j & -b_j \\ -\bar{b}_j & a_j \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1\bar{b}_2 & a_1b_2 + b_1\bar{a}_2 \\ \bar{a}_1\bar{b}_2 + \bar{b}_1a_2 & \bar{a}_1\bar{a}_2 + \bar{b}_1b_2 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{SU}(1,1)$, denn

$$\begin{aligned} |a_1a_2 + b_1\bar{b}_2|^2 - |a_1b_2 + b_1\bar{a}_2|^2 &= |a_1|^2|a_2|^2 + |b_1|^2|b_2|^2 - |a_1|^2|b_2|^2 - |b_1|^2|a_2|^2 \\ &= |a_1|^2\left(|a_2|^2 - |b_2|^2\right) - |b_1|^2\left(|a_2|^2 - |b_2|^2\right) \\ &= |a_1|^2 - |b_1|^2 \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

$\square$

`Die Bezeichnung` $\mathrm{SU}(1,1)$ `rührt daher, daß`

$$\mathrm{SU}(1,1) = \left\{ \gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) : \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{\gamma}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Außerdem haben wir

Lemma 2.3.4 *Für alle $z_1, z_2 \in D$ existiert ein $\gamma \in \mathrm{SU}(1,1)$ mit*

$$L_\gamma(z_1) = z_2\,.$$

Beweis. Seien $z_1, z_2 \in D$. Für $j = 1, 2$ setzen wir

$$\gamma_j := \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ \bar{b}_j & \bar{a}_j \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_j := \frac{1}{\sqrt{1-|z_j|^2}} \quad \text{und} \quad b_j := \frac{z_j}{\sqrt{1-|z_j|^2}}\,.$$

Dann ist $\gamma_j \in \mathrm{SU}(1,1)$ und $L_{\gamma_j}(0) = z_j$. Für $\gamma := \gamma_2\gamma_1^{-1}$ erhalten wir

$$L_\gamma(z_1) = L_{\gamma_2} \circ L_{\gamma_1}^{-1}(z_1) = L_{\gamma_2}(0) = z_2\,.$$

$\square$

Lemma 2.3.5 *Für jedes $\gamma \in \mathrm{SU}(1,1)$ ist $L_\gamma(D) = (D)$.*

Beweis. Sei $z \in D$ und

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1,1)\,.$$

Dann ist

$$\left(|a|^2 - |b|^2\right)|z|^2 \le |a|^2 - |b|^2\,,$$

d.h.

$$|a|^2|z|^2 + |b|^2 \le |b|^2|z|^2 + |a|^2\,.$$

Es folgt, daß

$$\begin{aligned} |az+b|^2 &= |a|^2|z|^2 + a\bar{b}z + \bar{a}b\bar{z} + |b|^2 \\ &\le |b|^2|z|^2 + a\bar{b}z + \bar{a}b\bar{z} + |a|^2 \\ &= |\bar{b}z + \bar{a}|^2 \end{aligned}$$

und somit

$$|L_\gamma(z)|^2 = \frac{|az+b|^2}{|\bar{b}z+\bar{a}|^2} \le 1\,.$$

Also gilt

$$L_\gamma(D) \subseteq D \quad \text{für jedes } \gamma \in \mathrm{SU}(1,1).$$

Da mit γ aber auch γ^{-1} in $\mathrm{SU}(1,1)$ liegt, haben wir auch

$$L_{\gamma^{-1}}(D) \subseteq D\,, \quad \text{d.h.} \quad D \subseteq L_\gamma(D) \quad \text{für jedes } \gamma \in \mathrm{SU}(1,1).$$

$\square$

Nach Lemma 2.3.5 ist die Einschränkung von L_γ auf D für jedes $\gamma \in \mathrm{SU}(1,1)$ ein Element von $\mathrm{Aut}(D)$. Es gilt auch die Umkehrung:

Satz 2.3.6 *Der Gruppenhomomorphismus*

$$\gamma \in \mathrm{SU}(1,1) \mapsto L_\gamma\big|_D \in \mathrm{Aut}(D)$$

ist surjektiv.

Beweis. Sei $f \in \mathrm{Aut}(D)$. Nach Lemma 2.3.4 existiert ein $\gamma \in \mathrm{SU}(1,1)$ mit $L_\gamma(0) = f(0)$. Dann ist $L_{\gamma^{-1}} \circ f \in \mathrm{Aut}(D)$ und $L_{\gamma^{-1}} \circ f(0) = 0$. Also existiert nach Folgerung 2.3.2 ein $\alpha \in S^1$ mit

$$L_\gamma^{-1} \circ f(z) = \alpha z \quad \text{für alle } z \in D.$$

Setzen wir nun

$$\gamma_0 := \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & \bar{a}_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_0^2 = \alpha\,,$$

so ist $\gamma_0 \in \mathrm{SU}(1,1)$ und

$$L_\gamma^{-1} \circ f(z) = L_{\gamma_0}(z)\,, \;\; \text{d.h.} \quad f(z) = L_{\gamma\gamma_0}(z) \quad \text{für alle } z \in D.$$

□

Sei

$$\mathrm{Aut}_D(\hat{\mathbb{C}}) := \{\hat{f} \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) : \hat{f}(D) = D\}\,.$$

Offensichtlich ist $\mathrm{Aut}_D(\hat{\mathbb{C}})$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Eine Konsequenz der bisherigen Überlegungen ist

Folgerung 2.3.7 *Die Abbildung*

$$\hat{f} \in \mathrm{Aut}_D(\hat{\mathbb{C}}) \mapsto \hat{f}\big|_D \in \mathrm{Aut}(D) \tag{2.3.3}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Daß der Gruppenhomomorphismus (2.3.3) injektiv ist, folgt aus dem Identitätssatz. Daß (2.3.3) auch surjektiv ist, sieht man mittels Satz 2.3.6. Ist nämlich $f \in \mathrm{Aut}(D)$, so existiert nach diesem Satz ein $\gamma \in \mathrm{SU}(1,1)$ mit

$$f = L_\gamma\big|_D\,.$$

□

Wir kommen jetzt zur Bestimmung der holomorphen Transformationen der oberen Halbebene H. Dazu betrachten wir die Untergruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ (vgl. Beispiel 1.2.8).

Lemma 2.3.8 *Sei* $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *und sei* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $cz + d \neq 0$. *Dann gilt*

$$\operatorname{Im} L_\gamma(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}\,.$$

Beweis. Da die Koeffizienten von γ reell sind, können wir

$$2\mathrm{i}\operatorname{Im} L_\gamma(z) = L_\gamma(z) - \overline{L_\gamma(z)} = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\,(z-\bar{z}) = 2\mathrm{i}\,\frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$$

schließen. □

Folgerung 2.3.9 *Für jedes* $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *gilt* $L_\gamma(H) = H$.

Beweis. Nach Lemma 2.3.8 gilt $\operatorname{Im} L_\gamma(z) > 0$ für $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ dann und nur dann, wenn $\operatorname{Im} z > 0$. Dies liefert die Behauptung. □

Folgerung 2.3.9 sagt uns, daß die Einschränkung von L_γ auf H für jedes $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ in $\mathrm{Aut}(H)$ liegt. Die Umkehrung dieses Sachverhalts werden wir mit Hilfe der Cayley-Transformation auf Satz 2.3.6 zurückführen.

Die Cayley-Transformation $h_C : H \to D$ ist durch

$$h_C(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

definiert. Wie man leicht verifiziert, ist h_C bijektiv. Außerdem sieht man, daß

$$h_C = L_{\gamma_C}\big|_H \quad \text{für} \quad \gamma_C := \frac{1-\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})\,.$$

Folglich sind h_C und $h_C^{-1} = L_{\gamma_C^{-1}}\big|_D$ holomorph.

Lemma 2.3.10 *Ist $\gamma \in \mathrm{SU}(1,1)$, so ist $\gamma_C^{-1}\gamma\gamma_C \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.*

Beweis. Sei

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1,1)\,.$$

Dann ist $\gamma_C^{-1}\gamma\gamma_C \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Also genügt es einzusehen, daß die Koeffizienten von $\gamma_C^{-1}\gamma\gamma_C$ reell sind. Dies erhält man, indem man unter Benutzung von

$$\gamma_C^{-1} = \frac{1-\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

die Beziehung

$$\gamma_C^{-1}\gamma\gamma_C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a+b) & \operatorname{Im}(a-b) \\ -\operatorname{Im}(a+b) & \operatorname{Re}(a-b) \end{pmatrix}$$

nachrechnet. □

Bemerkung 2.3.11 Die Abbildung

$$\gamma \in \mathrm{SU}(1,1) \mapsto \gamma_C^{-1}\gamma\gamma_C \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

ist sogar ein Isomorphismus. □

Satz 2.3.12 *Der Gruppenhomomorphismus*

$$\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \mapsto L_\gamma\big|_H \in \mathrm{Aut}(H)$$

ist surjektiv.

Beweis. Sei $f \in \mathrm{Aut}(H)$. Dann ist $h_C \circ f \circ h_C^{-1} \in \mathrm{Aut}(D)$. Also existiert nach Satz 2.3.6 ein $\gamma_0 \in \mathrm{SU}(1,1)$ mit

$$h_C \circ f \circ h_C^{-1} = L_{\gamma_0}\big|_D .$$

Demnach gilt

$$f(z) = h_C^{-1} \circ L_{\gamma_0} \circ h_C(z) = L_{\gamma_C^{-1}\gamma_0\gamma_C}(z) \quad \text{für alle } z \in H.$$

Da $\gamma_C^{-1}\gamma_0\gamma_C$ nach Lemma 2.3.10 in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ liegt, folgt die Behauptung. □

Analog zu Folgerung 2.3.7 beweist man

Folgerung 2.3.13 *Die Abbildung*

$$\hat{f} \in \mathrm{Aut}_H(\hat{\mathbb{C}}) \mapsto \hat{f}\big|_H \in \mathrm{Aut}(H) \quad \textit{mit} \quad \mathrm{Aut}_H(\hat{\mathbb{C}}) := \{\hat{f} \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) : \hat{f}(H) = H\}$$

ist ein Isomorphimus. □

2.4 Fixpunkte und Normalformen

Zunächst wollen wir zeigen, daß eine Möbius-Transformation $L_\gamma \neq \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ entweder genau einen oder genau zwei Fixpunkte besitzt. Dazu werden wir $\hat{\mathbb{C}}$ mit dem komplex projektiven Raum $\mathbb{CP}^1$ identifizieren.

Definition 2.4.1 *Der komplex projektive Raum $\mathbb{CP}^1$ ist der Faktorraum*

$$\mathbb{CP}^1 := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\sim_{\mathbb{C}^*},$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim_{\mathbb{C}^*}$ auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ dadurch definiert ist, daß $w_1 \sim_{\mathbb{C}^*} w_2$ genau dann gilt, wenn ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$ mit $w_1 = \alpha w_2$ existiert.

Die Äquivalenzklasse von $(w^0, w^1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ bezüglich $\sim_{\mathbb{C}^*}$ wird mit $[w^0 : w^1]$ bezeichnet.

Bemerkung 2.4.2 Offensichtlich gilt $w_1 \sim_{\mathbb{C}^*} w_2$ für $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ genau dann, wenn w_1 und w_2 denselben eindimensionalen komplexen Unterraum von $\mathbb{C}^2$ erzeugen. Somit kann $\mathbb{CP}^1$ mit der Menge der eindimensionalen komplexen Unterräume von $\mathbb{C}^2$ identifiziert werden. □

Wir definieren $j : \mathbb{CP}^1 \to \hat{\mathbb{C}}$ durch

$$j([w^0 : w^1]) := \begin{cases} \dfrac{w^0}{w^1} & \text{für } w^1 \neq 0 \\ \infty & \text{für } w^1 = 0 \end{cases}$$

Wie man leicht sieht, ist die Abbildung j bijektiv. Die inverse Abbildung j^{-1} ist durch

$$j^{-1}(z) = [z : 1] \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad j^{-1}(\infty) = [1 : 0]$$

gegeben. Die Abbildung $j^{-1} \circ L_\gamma \circ j : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ für $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ bezeichnen wir ebenfalls mit L_γ. Damit haben wir

$$L_\gamma \circ j = j \circ L_\gamma \quad \text{für jedes } \gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}). \tag{2.4.1}$$

Sei $p : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^1$ die kanonische Projektion, also

$$p(w) := [w^0 : w^1] \quad \text{für } w = (w^0, w^1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}.$$

Die Elemente von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ verstehen wir als lineare Abbildungen $\gamma : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Das heißt, für

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \quad \text{und} \quad w = (w^0, w^1) \in \mathbb{C}^2$$

ist

$$\gamma(w) = w\,\gamma^T = (aw^0 + bw^1, cw^0 + dw^1).$$

Offensichtlich gilt

$$(\gamma_1\gamma_2)(w) = \gamma_1(\gamma_2(w)) \quad \text{für } \gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \text{ und } w \in \mathbb{C}^2.$$

Lemma 2.4.3 *Für jedes $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ gilt*

$$p \circ \gamma = L_\gamma \circ p.$$

Beweis. Sei
$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \quad \text{und} \quad w = (w^0, w^1) \in \mathbb{C}^2 \,.$$
Dann ist
$$p(\gamma(w)) = [aw^0 + bw^1 : cw^0 + dw^1]\,.$$
Andererseits ist
$$\begin{aligned} L_\gamma(p(w)) &= L_\gamma([w^0 : w^1]) = L_\gamma \circ j^{-1}\left(\frac{w^0}{w^1}\right) \\ &= j^{-1} \circ L_\gamma\left(\frac{w^0}{w^1}\right) = j^{-1}\left(\frac{a\frac{w^0}{w^1} + b}{c\frac{w^0}{w^1} + d}\right) \\ &= j^{-1}\left(\frac{aw^0 + bw^1}{cw^0 + dw^1}\right) = [aw^0 + bw^1 : cw^0 + dw^1] \end{aligned}$$
für $w_1 \neq 0$ und
$$L_\gamma(p(w)) = L_\gamma([w^0 : 0]) = j^{-1} \circ L_\gamma(\infty) = j^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = [a : c] = [aw^0 : cw^0]$$
für $w_1 = 0$. □

Satz 2.4.4 *Eine Möbius-Transformation $L_\gamma \neq \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ besitzt entweder genau einen oder genau zwei Fixpunkte.*

Beweis. Aufgrund von (2.4.1) genügt es zu zeigen, daß eine von der Identität verschiedene Transformation $L_\gamma : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ mindestens einen und höchstens zwei Fixpunkte besitzt.

Sei $w \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, und sei $p(w) \in \mathbb{CP}^1$ ein Fixpunkt von L_γ, d.h.
$$L_\gamma(p(w)) = p(w)\,.$$
Nach Lemma 2.4.3 gilt dann
$$p(\gamma(w)) = p(w) \quad \text{und somit} \quad \gamma(w) = \alpha w \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{C}^*.$$
Folglich ist $p(w)$ genau dann ein Fixpunkt von L_γ, wenn w ein Eigenvektor der linearen Abbildung γ ist. Da eine komplex lineare Abbildung mindestens einen Eigenvektor besitzt, existiert damit wenigstens ein Fixpunkt von L_γ.

Wir nehmen jetzt an, daß $p(w_1), p(w_2), p(w_3) \in \mathbb{CP}^1$ drei verschiedene Fixpunkte von L_γ sind. Dann ist
$$w_3 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 \quad \text{mit } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}^*.$$
Wegen
$$\gamma(w_k) = \alpha_k w_k \quad \text{für ein } \alpha_k \in \mathbb{C}^* \text{ und } k = 1, 2, 3$$
erhalten wir, daß
$$\gamma(w_3) = \alpha_3\beta_1 w_1 + \alpha_3\beta_2 w_2 \quad \text{und} \quad \gamma(w_3) = \beta_1\alpha_1 w_1 + \beta_2\alpha_2 w_2\,.$$
Da $\{w_1, w_2\}$ linear unabhängig ist, folgt
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3\,.$$
Also ist γ ein Vielfaches der Identität und somit $L_\gamma = \mathrm{id}_{\mathbb{CP}^1}$. □

Als nächstes wollen wir die Konjugationsklassen (siehe folgende Definition) von Möbius-Transformationen bestimmen.

Definition 2.4.5 *Zwei Elemente g_1 und g_2 einer Gruppe G heißen konjugiert, falls ein $g_0 \in G$ mit $g_2 = g_0 g_1 g_0^{-1}$ existiert. Wir schreiben dann $g_1 \sim g_2$.*

Die folgende Definition ist durch Lemma 2.1.12 gerechtfertigt.

Definition 2.4.6 *Für eine Möbius-Transformation $f = L_\gamma$ definieren wir*

$$\mathrm{Tr}^2(f) := \mathrm{Tr}^2(\gamma)\,.$$

Lemma 2.4.7 *Sind f_1 und f_2 zwei konjugierte Möbius-Transformationen, so gilt:*

(i) *f_1 und f_2 haben dieselbe Anzahl von Fixpunkten.*

(ii) $\mathrm{Tr}^2(f_1) = \mathrm{Tr}^2(f_2)$.

Beweis. Ist $f_2 = f_0 \circ f_1 \circ f_0^{-1}$ für ein $f_0 \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, so ist $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ genau dann ein Fixpunkt von f_1, wenn $f_0(z_0)$ ein Fixpunkt von f_2 ist. Dies liefert (i). Die zweite Behauptung folgt aus

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\right) = \mathrm{Tr}(\gamma_1) \quad \text{für } \gamma_0, \gamma_1 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}).$$

□

Wir definieren $m_\alpha \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ für $\alpha \in \mathbb{C}^*$ durch $m_\alpha(z) := \alpha z$, falls $\alpha \neq 1$, und $m_1(z) := z + 1$. Dann ist

$$m_\alpha = L_{\gamma_\alpha} \quad \text{für} \quad \gamma_\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a^2 = \alpha,$$

falls $\alpha \neq 1$, und

$$m_1 = L_{\gamma_1} \quad \text{für} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demzufolge ist

$$\mathrm{Tr}^2(m_\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha} + 2\,. \tag{2.4.2}$$

Der nächste Satz besagt, daß die m_α Normalformen von Möbius-Transformationen sind.

Satz 2.4.8 *Für jede Möbius-Transformation $f \neq \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$ mit $f \sim m_\alpha$.*

Beweis. Sei $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ und $f \neq \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$. Nach Satz 2.4.4 hat f mindestens einen Fixpunkt $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. Nach Lemma 2.1.10 können wir $f_1 \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ derart wählen, daß $f_1(z_0) = \infty$. Für $\tilde{f} := f_1 \circ f \circ f_1^{-1}$ gilt dann $\tilde{f}(\infty) = \infty$ und somit (vgl. Satz 2.2.2)

$$\tilde{f}(z) = \alpha z + \beta \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{C}^* \text{ und } \beta \in \mathbb{C}.$$

Hat f einen zweiten Fixpunkt, so hat nach Lemma 2.4.7 auch $\tilde{f}$ einen weiteren Fixpunkt. Demzufolge ist $\alpha \neq 1$. Wir definieren dann $f_2 \in \mathrm{Aut}_\infty(\hat{\mathbb{C}})$ durch

$$f_2(z) := z + \frac{\beta}{\alpha - 1}$$

und erhalten

$$f_2 \circ \tilde{f} \circ f_2^{-1}(z) = f_2 \circ \tilde{f}\left(z - \frac{\beta}{\alpha - 1}\right) = f_2\left(\alpha z - \frac{\beta}{\alpha - 1}\right) = \alpha z\,,$$

also

$$(f_2 \circ f_1) \circ f \circ (f_2 \circ f_1)^{-1} = m_\alpha\,.$$

Hat f nur einen Fixpunkt, so muß $\alpha = 1$ und $\beta \neq 0$ sein. In diesem Fall definieren wir $f_2 \in \mathrm{Aut}_\infty(\hat{\mathbb{C}})$ durch

$$f_2(z) := \frac{z}{\beta}\,.$$

Damit ist

$$f_2 \circ \tilde{f} \circ f_2^{-1}(z) = f_2 \circ \tilde{f}(\beta z) = f_2(\beta z + \beta) = z + 1\,,$$

d.h.

$$(f_2 \circ f_1) \circ f \circ (f_2 \circ f_1)^{-1} = m_1\,.$$

□

Bemerkung 2.4.9 Satz 2.4.8 kann auch mit Hilfe der Jordanschen Normalform bewiesen werden. Danach ist jede von $\pm e$ verschiedene Matrix $\gamma \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{C})$ zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{für ein } a \in \mathbb{C}^*$$

konjugiert. □

Der nächste Satz gibt eine vollständige Beschreibung der Konjugationsklassen von Möbius-Transformationen.

Satz 2.4.10 *Seien f_1 und f_2 zwei von der Identität verschiedene Möbius-Transformationen. Dann gilt $f_1 \sim f_2$ dann und nur dann, wenn $\mathrm{Tr}^2(f_1) = \mathrm{Tr}^2(f_2)$.*

Beweis. Die eine Richtung der Aussage ist Lemma 2.4.7(ii).

Es gelte $\mathrm{Tr}^2(f_1) = \mathrm{Tr}^2(f_2)$. Nach Satz 2.4.8 existieren $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^*$ mit $f_1 \sim m_{\alpha_1}$ und $f_2 \sim m_{\alpha_2}$. Wegen Lemma 2.4.7(ii) gilt dann auch

$$\mathrm{Tr}^2(m_{\alpha_1}) = \mathrm{Tr}^2(m_{\alpha_2})\,,$$

d.h. (vgl. (2.4.2))

$$\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1} + 2 = \alpha_2 + \frac{1}{\alpha_2} + 2\,.$$

Die letzte Relation ist äquivalent zu

$$\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2 = \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1 \quad \text{bzw.} \quad (\alpha_1\alpha_2 - 1)(\alpha_1 - \alpha_2) = 0\,.$$

Demnach ist $\alpha_1 = \alpha_2$ oder $\alpha_1 = \alpha_2^{-1}$. Ist $\alpha \in \mathbb{C}^*$ und $\alpha \neq 1$, so ist $m_\alpha \sim m_{\alpha^{-1}}$, denn

$$s \circ m_\alpha \circ s(z) = s \circ m_\alpha\left(\frac{1}{z}\right) = s\left(\frac{\alpha}{z}\right) = \frac{z}{\alpha} = m_{\alpha^{-1}}(z)\,.$$

Damit folgt, daß $m_{\alpha_1} \sim m_{\alpha_2}$ und somit auch $f_1 \sim f_2$. □

Definition 2.4.11 *Sei $f \neq \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ eine Möbius-Transformation.*

(i) f heißt parabolisch, falls $f \sim m_1$.

(ii) f heißt elliptisch, falls $f \sim m_\alpha$ für ein $\alpha \in S^1$, $\alpha \neq 1$.

(iii) f heißt loxodromisch, falls $f \sim m_\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$ mit $|\alpha| \neq 1$.

Außerdem nennt man eine loxodromische Transformation hyperbolisch, falls $f \sim m_\alpha$ für ein $\alpha \in (0, \infty)$, $\alpha \neq 1$.

Bemerkung 2.4.12 Eine Möbius-Transformation f ist genau dann parabolisch, wenn f genau einen Fixpunkt hat (vgl. Lemma 2.4.7(i) oder den Beweis von Satz 2.4.8). □

Satz 2.4.13 *Für eine Möbius-Transformation $f \neq \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ gilt:*

(i) f ist genau dann parabolisch, wenn $\mathrm{Tr}^2(f) = 4$.

(ii) f ist genau dann elliptisch, wenn $\mathrm{Tr}^2(f) \in [0, 4)$.

(iii) f ist genau dann loxodromisch, wenn $\mathrm{Tr}^2(f) \notin [0, 4]$.

(iv) f ist genau dann hyperbolisch, wenn $\mathrm{Tr}^2(f) \in (4, \infty)$.

Beweis. Wir zeigen (i), (ii) und (iv). Die Aussage (iii) ist eine Konsequenz von (i) und (ii).

Sei $f \sim m_\alpha$. Dann ist (vgl. Satz 2.4.10 und (2.4.2))

$$\mathrm{Tr}^2(f) = \alpha + \frac{1}{\alpha} + 2\,.$$

Ist f parabolisch, so ist $\alpha = 1$ und $\mathrm{Tr}^2(f) = 4$. Umgekehrt folgt aus $\mathrm{Tr}^2(f) = 4$, daß $\alpha = 1$ und somit f parabolisch ist. Damit ist (i) bewiesen.

Ist f elliptisch, so ist $\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\cos\theta \neq 1$. Dann ist

$$\mathrm{Tr}^2(f) = 2\cos\theta + 2\,,$$

woraus $\mathrm{Tr}^2(f) \in [0, 4)$ folgt. Zum Beweis der Umkehrung schreiben wir $\alpha = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ für ein $r \in (0, \infty)$ und $\theta \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$\mathrm{Tr}^2(f) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + 2 + \mathrm{i}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta\,. \tag{2.4.3}$$

Daraus sehen wir, daß $r = 1$ oder $\sin\theta = 0$, falls $\mathrm{Tr}^2(f) \in \mathbb{R}$. Ist $\sin\theta = 0$ und $r \neq 1$, so ist $\cos\theta = \pm 1$ und $r + r^{-1} > 2$, was

$$\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + 2 \notin [0, 4]$$

impliziert. Also folgt aus $\mathrm{Tr}^2(f) \in [0, 4)$, daß $r = 1$ und $\cos\theta \neq 1$, d.h. $\alpha \in S^1$ und $\alpha \neq 1$, was bedeutet, daß f elliptisch ist. Damit haben wir (ii) gezeigt.

Ist f hyperbolisch, so ist $\alpha \in (0, \infty)$ und $\alpha \neq 1$. Folglich muß $\mathrm{Tr}^2(f) \in (4, \infty)$ gelten. Ist $\mathrm{Tr}^2(f) \in (4, \infty)$, so schließt man mit Hilfe von (2.4.3), daß $\alpha \in (0, \infty)$ und $\alpha \neq 1$, also f hyperbolisch ist. □

Eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 2.4.13(iv) ist

Folgerung 2.4.14 *Ist $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ und L_γ loxodromisch, so ist L_γ auch hyperbolisch.* □

Kapitel 3

Kleinsche Gruppen

3.1 Definition und Beispiele

Im weiteren werden wir für Möbius-Transformationen f und g statt $f \circ g$ einfach fg schreiben. Sei G eine Gruppe von Möbius-Transformationen, d.h. eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.

Definition 3.1.1 *Die Limesmenge $\Lambda(G)$ von G ist die Menge aller Punkte $z \in \hat{\mathbb{C}}$, für die ein $w \in \hat{\mathbb{C}}$ und eine Folge (g_n) in G mit*

(i) $z = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(w)$ *und*

(ii) $g_n \neq g_m$ *für* $n \neq m$

existieren. Die Menge $\Omega(G) := \hat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(G)$ heißt Diskontinuitätsbereich von G.

Bemerkung 3.1.2 Insbesondere ist ein Punkt $z \in \hat{\mathbb{C}}$, welcher Fixpunkt von unendlich vielen $g \in G$ ist, ein Element von $\Lambda(G)$. □

Definition 3.1.3 *G heißt Kleinsche Gruppe, falls $\Omega(G) \neq \emptyset$.*

Im Rest dieses Abschnitts werden wir sowohl elementare Eigenschaften der Limesmenge angeben als auch einfache Beispiele für Kleinsche Gruppen betrachten.

Satz 3.1.4 *Ist G endlich, so ist $\Lambda(G) = \emptyset$. Insbesondere ist jede endliche Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ eine Kleinsche Gruppe.*

Beweis. Ist G endlich, so existiert keine Folge (g_n) in G mit $g_n \neq g_m$ für $n \neq m$. Somit folgt die Behauptung direkt aus Definition 3.1.1. □

Satz 3.1.5 *Ist G_0 eine Untergruppe von G, so ist $\Lambda(G_0) \subseteq \Lambda(G)$. Insbesondere ist eine Untergruppe einer Kleinschen Gruppe wieder eine Kleinsche Gruppe.*

Beweis. Die Behauptung ist offensichtlich. □

Satz 3.1.6 *Die Mengen $\Lambda(G)$ und $\Omega(G)$ sind G-invariant, d.h., für jedes $g \in G$ gilt $g(\Lambda(G)) = \Lambda(G)$ und $g(\Omega(G)) = \Omega(G)$.*

Beweis. Da $\Omega(G) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(G)$, genügt es zu zeigen, daß $\Lambda(G)$ G-invariant ist.

Sei $g \in G$ beliebig und $z \in \Lambda(G)$. Dann existieren ein $w \in \hat{\mathbb{C}}$ und eine Folge (g_n) in G mit $z = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(w)$ und $g_n \neq g_m$ für $n \neq m$. Da $g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ stetig ist, folgt

$$g(z) = \lim_{n\to\infty} g(g_n(w)) = \lim_{n\to\infty} (gg_n)(w)\,.$$

Außerdem gilt $gg_n \neq gg_m$ für $n \neq m$. Also ist $g(z) \in \Lambda(G)$, d.h., wir haben $g(\Lambda(G)) \subseteq \Lambda(G)$. Da dies für jedes $g \in G$ gilt, haben wir auch $g^{-1}(\Lambda(G)) \subseteq \Lambda(G)$, d.h. $\Lambda(G) \subseteq g(\Lambda(G))$. □

Satz 3.1.7 *Für eine Möbius-Transformation f ist $\Lambda(fGf^{-1}) = f(\Lambda(G))$ und $\Omega(fGf^{-1}) = f(\Omega(G))$.*

Beweis. Es genügt wieder, die erste Behauptung zu zeigen.

Sei $z \in \Lambda(fGf^{-1})$. Dann existieren ein $w \in \hat{\mathbb{C}}$ und eine Folge (g_n) in G mit $z = \lim\limits_{n\to\infty} (fg_nf^{-1})(w)$ und $fg_nf^{-1} \neq fg_mf^{-1}$ für $n \neq m$. Dies impliziert $f^{-1}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(f^{-1}(w))$ und $g_n \neq g_m$ für $n \neq m$. Dabei haben wir genutzt, daß $f^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ stetig ist. Folglich ist $f^{-1}(z) \in \Lambda(G)$ und $z = ff^{-1}(z) \in f(\Lambda(G))$.

Ist umgekehrt $z \in f(\Lambda(G))$, so existieren ein $w \in \hat{\mathbb{C}}$ und eine Folge (g_n) in G mit $f^{-1}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(w)$ und $g_n \neq g_m$ für $n \neq m$, woraus, da $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ stetig ist, $z = \lim\limits_{n\to\infty} (fg_nf^{-1})(f(w))$ und $fg_nf^{-1} \neq fg_mf^{-1}$ für $n \neq m$, also $z \in \Lambda(fGf^{-1})$ folgt. □

Für eine Möbius-Transformation f bezeichnen wir mit $\langle f \rangle$ die von f erzeugte zyklische Gruppe, d.h.

$$\langle f \rangle := \{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

und mit $\mathcal{F}(f)$ die Menge der Fixpunkte von f.

Satz 3.1.8 *Sei $f \neq \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ eine Möbius-Transformation. Ist f parabolisch oder loxodromisch, so ist $\Lambda(\langle f \rangle) = \mathcal{F}(f)$ und folglich $\langle f \rangle$ eine Kleinsche Gruppe. Ist f elliptisch und $\langle f \rangle$ nicht endlich, so ist $\Lambda(\langle f \rangle) = \hat{\mathbb{C}}$ und somit $\langle f \rangle$ keine Kleinsche Gruppe.*

Beweis. Sei $f_0 \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ derart, daß $f = f_0 m_\alpha f_0^{-1}$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Dann gilt (vgl. den Beweis von Lemma 2.4.7(i) und Satz 3.1.7)

$$\mathcal{F}(f) = f_0(\mathcal{F}(m_\alpha)) \quad \text{und} \quad \Lambda(\langle f \rangle) = f_0(\Lambda(\langle m_\alpha \rangle))\,.$$

Folglich können wir o.B.d.A. annehmen, daß $f = m_\alpha$.

Ist f parabolisch, so ist $\alpha = 1$ und $\mathcal{F}(f) = \{\infty\}$. Für die Potenzen von f gilt

$$f^n(z) = z + n \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ und } n \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.1}$$

Ist f loxodromisch, so ist $|\alpha| \neq 1$ und $\mathcal{F}(f) = \{0, \infty\}$. Hier ist

$$f^n(z) = \alpha^n z \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ und } n \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.2}$$

In beiden Fällen folgt, daß $f^n \neq f^m$ für $n \neq m$ und $n, m \in \mathbb{Z}$. Da jeder Fixpunkt von f auch Fixpunkt von f^n für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist, erhalten wir aufgrund von Bemerkung 3.1.2, daß $\mathcal{F}(f) \subseteq \Lambda(\langle f \rangle)$.

Ist umgekehrt $z_0 \in \Lambda(\langle f \rangle)$, so existieren ein $w \in \hat{\mathbb{C}}$ und eine Folge (k_n) in $\mathbb{Z}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} |k_n| = \infty$ und $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} f^{k_n}(w)$, woraus für parabolisches und loxodromisches f mit Hilfe von (3.1.1) und (3.1.2) die Beziehung $z_0 \in \mathcal{F}(f)$ folgt. Also gilt auch $\Lambda(\langle f \rangle) \subseteq \mathcal{F}(f)$.

Sei nun f elliptisch und $\langle f \rangle$ nicht endlich. Dann ist

$$f(z) = \alpha z \quad \text{für ein } \alpha \in S^1.$$

Da S^1 kompakt ist, besitzt jede Folge in S^1 eine konvergente Teilfolge. Insbesondere existiert eine Folge (k_n) in $\mathbb{Z}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^{k_n} = \alpha_0 \in S^1 \quad \text{und somit} \quad z = \lim_{n\to\infty} f^{k_n}(\alpha_0^{-1} z)$$

für jedes $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Da $\langle f \rangle$ unendlich ist, gilt außerdem $f^n \neq f^m$ für $n \neq m$ und $n, m \in \mathbb{Z}$. Wäre nämlich $f^n = f^m$ für zwei ganze Zahlen $n \neq m$, so wäre $f^{n-m} = \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ und folglich $\langle f \rangle$ endlich. Damit ist gezeigt, daß jeder Punkt $z \in \hat{\mathbb{C}}$ in $\Lambda(\langle f \rangle)$ liegt, also $\Lambda(\langle f \rangle) = \hat{\mathbb{C}}$ gilt. □

Aus Satz 3.1.8 können wir folgende Charakterisierung elliptischer und loxodromischer Transformationen ableiten.

Folgerung 3.1.9 *Sei f eine Möbius-Transformation und $f \neq \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$. Dann gilt:*

(i) f ist genau dann elliptisch, wenn f genau zwei Fixpunkte besitzt und $\langle f \rangle$ entweder endlich oder keine Kleinsche Gruppe ist.

(ii) f ist genau dann loxodromisch, wenn f genau zwei Fixpunkte besitzt und $\langle f \rangle$ eine unendliche Kleinsche Gruppe ist. □

Eine Konsequenz aus Satz 3.1.5 und Satz 3.1.8 ist

Folgerung 3.1.10 *Ist G eine Kleinsche Gruppe, so enthält G keine elliptischen Transformationen unendlicher Ordnung.*

Beweis. Sei G eine Kleinsche Gruppe. Wir nehmen an, daß $g \in G$ elliptisch und von unendlicher Ordnung ist. Dann ist $\langle g \rangle$ eine unendliche Untergruppe von G, die nach Satz 3.1.8 keine Kleinsche Gruppe ist. Dies widerspricht Satz 3.1.5, wonach jede Untergruppe einer Kleinschen Gruppe selbst eine Kleinsche Gruppe ist. □

Sei

$$G(1) := \{g \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) : g = L_\gamma \text{ für ein } \gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})\}.$$

Dabei ist

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ und } ad - bc = 1 \right\}.$$

$G(1)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ und wird Modulgruppe genannt.

Satz 3.1.11 *Die Limesmenge von $G(1)$ ist $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Inbesondere ist $G(1)$ eine Kleinsche Gruppe.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß $H \subseteq \Omega(G(1))$. Dazu nehmen wir an, daß $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in H$ ein Punkt in $\Lambda(G(1))$ ist. Dann existieren ein $w = x + \mathrm{i}y \in \hat{\mathbb{C}}$ und eine Folge (g_n) paarweise verschiedener Elemente von $G(1)$ mit

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} g_n(w)\,.$$

Da $g(H) = H$ für jedes $g \in G(1)$ (vgl. Folgerung 2.3.9) und da H offen ist, muß $w \in H$, d.h. $y > 0$ gelten. Außerdem können wir o.B.d.A. voraussetzen, daß

$$|\mathrm{Re}\, g_n(w) - \mathrm{Re}\, z_0| < \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{3.1.3}$$

Sei $g_n = L_{\gamma_n}$ mit

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\,.$$

Dann ist (siehe Lemma 2.3.8)

$$\mathrm{Im}\, g_n(w) = \frac{y}{|c_n w + d_n|^2}\,.$$

Da die Folge $(\mathrm{Im}\, g_n(w))$ gegen $\mathrm{Im}\, z_0 = y_0 > 0$ konvergiert, muß die Folge $(|c_n w + d_n|^2)$ beschränkt sein. Das heißt, es existiert ein solches $M > 0$, daß

$$|c_n w + d_n|^2 < M^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $|c_n w + d_n|^2 = (c_n x + d_n)^2 + c_n^2 y^2$ folgt

$$|c_n x + d_n| < M \quad \text{und} \quad |c_n|\, y < M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

woraus wir weiter

$$|c_n| < \frac{M}{y} \quad \text{und} \quad |d_n| \le |c_n x + d_n| + |c_n x| < M + \frac{M}{y}|x| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

schließen. Da c_n und d_n ganz sind, erhalten wir, daß die Menge $\{(c_n, d_n) : n \in \mathbb{N}\}$ endlich ist. Gelte $(c_n, d_n) = (c_m, d_m)$. Dann ist

$$\gamma_n \gamma_m^{-1} = \begin{pmatrix} a_{n,m} & b_{n,m} \\ 0 & d_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt wegen $\gamma_n \gamma_m^{-1} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, daß $a_{n,m} = d_{n,m} = \pm 1$. Demnach ist $g_n g_m^{-1} = L_{\gamma_0}$ mit

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & b_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für ein } b_0 \in \mathbb{Z}.$$

Da $g_n = L_{\gamma_0 \gamma_m}$ und

$$\gamma_0 \gamma_m = \begin{pmatrix} a_m + b_0 c_m & b_m + b_0 d_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix},$$

gelangen wir zu

$$g_n(z) = \frac{(a_m + b_0 c_m)\, z + b_m + b_0 d_m}{c_m z + d_m} = \frac{a_m z + b_m}{c_m z + d_m} + b_0 = g_m(z) + b_0\,.$$

Die Bedingung (3.1.3) impliziert nun, daß

$$|b_0| = |\operatorname{Re} g_n(w) - \operatorname{Re} g_m(w)| \leq |\operatorname{Re} g_n(w) - \operatorname{Re} z_0| + |\operatorname{Re} g_m(w) - \operatorname{Re} z_0| < 1$$

und somit $b_0 = 0$. Also ist $g_n = g_m$, falls $(c_n, d_n) = (c_m, d_m)$.

Insgesamt erhalten wir, daß die Folge (g_n) im Widerspruch zu unserer Annahme nur endlich viele verschiedene Folgenglieder hat. Damit ist $H \subseteq \Omega(G(1))$ gezeigt.

Es kann auch kein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z_0 < 0$ in $\Lambda(G(1))$ liegen. Wegen $\overline{g(w)} = g(\bar{w})$ wäre sonst nämlich auch $\bar{z}_0 \in H$ ein Element von $\Lambda(G(1))$.

Es bleibt zu zeigen, daß $\hat{\mathbb{R}} \subseteq \Lambda(G(1))$. Zuerst bemerken wir, daß $m_1 \in G(1)$ und folglich $\langle m_1 \rangle \subseteq G(1)$. Als Anwendung von Satz 3.1.5 und Satz 3.1.8 erhalten wir

$$\{\infty\} = \mathcal{F}(m_1) = \Lambda(\langle m_1 \rangle) \subseteq \Lambda(G(1))\,.$$

Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir wählen eine Folge paarweise verschiedener rationaler Zahlen $q_n \neq 0$, für die

$$x = \lim_{n \to \infty} q_n\,,$$

und schreiben $q_n = \dfrac{b_n}{d_n}$ mit $b_n, d_n \in \mathbb{Z}$. Dabei nehmen wir an, daß b_n und d_n teilerfremd sind. Folglich existieren ganze Zahlen a_n und c_n mit $a_n d_n - b_n c_n = 1$. Setzen wir jetzt

$$g_n := L_{\gamma_n} \quad \text{mit} \quad \gamma_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix},$$

so haben wir $g_n \in G(1)$ für $n \in \mathbb{N}$, $g_n \neq g_m$ für $n \neq m$ und

$$\lim_{n \to \infty} g_n(0) = \lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{d_n} = x\,,$$

woraus $x \in \Lambda(G(1))$ folgt. $\square$

Bemerkung 3.1.12 Nach Satz 3.1.5 ist jede Untergruppe von $G(1)$ eine Kleinsche Gruppe. Beispiele für Untergruppen von $G(1)$ sind die sogenannten Hauptkongruenzgruppen $G(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$, die aus denjenigen Möbius-Transformationen L_γ bestehen, für die $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ von der Gestalt

$$\gamma = e + n\gamma_0 \quad \text{oder} \quad \gamma = -e + n\gamma_0 \quad \text{mit } \gamma_0 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

ist. $\square$

3.2 Abgeschlossenheit und Diskretheit

Im ersten Teil dieses Abschnitts untersuchen wir weitere Eigenschaften der Limesmenge. Sei weiterhin G eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Für $w \in \hat{\mathbb{C}}$ definieren wir $\Lambda_w(G)$ als die Menge derjenigen Punkte $z \in \hat{\mathbb{C}}$, für die eine Folge (g_n) in G mit $g_n \neq g_m$ für $n \neq m$ und $z = \lim_{n\to\infty} g_n(w)$ existiert. Offensichtlich ist $\Lambda_w(G) \subseteq \Lambda(G)$. Außerdem haben wir

Lemma 3.2.1 *(i) $\Lambda_w(G)$ ist G-invariant.*
(ii) Für jedes $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ ist $\Lambda_{f(w)}(fGf^{-1}) = f(\Lambda_w(G))$.

Beweis. Die Behauptung beweist man ähnlich wie Satz 3.1.6 und Satz 3.1.7. □

Satz 3.2.2 *$\Lambda_w(G)$ ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei z_0 ein Häufungspunkt von $\Lambda_w(G)$. Wir müssen zeigen, daß $z_0 \in \Lambda_w(G)$. Zuerst nehmen wir an, daß $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann existiert eine Folge (z_n) in $\Lambda_w(G)$ mit

$$|z_0 - z_n| < \frac{1}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $z_n \in \Lambda_w(G)$ können wir eine Folge (g_n) in G derart wählen, daß

$$|g_n(w) - z_n| < \frac{1}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

und $g_n \neq g_m$ für $n \neq m$. Dann haben wir

$$|g_n(w) - z_0| \leq |g_n(w) - z_n| + |z_0 - z_n| < \frac{2}{n} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

und folglich $z_0 \in \Lambda_w(G)$.
Ist $z_0 = \infty$, so existiert eine Folge (z_n) in $\Lambda_w(G)$ mit

$$|s(z_n)| < \frac{1}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Folge (g_n) in G wählen wir derart, daß

$$|s(g_n(w)) - s(z_n)| < \frac{1}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

und $g_n \neq g_m$ für $n \neq m$. Wie oben folgt

$$s(g_n(w)) \to \infty \quad \text{für} \quad n \to 0\,.$$

Das bedeutet, daß

$$\infty = \lim_{n\to\infty} g_n(w)$$

und somit $\infty \in \Lambda_w(G)$. □

Wir wollen zeigen, daß $\Lambda(G) = \Lambda_w(G)$, falls $w \in \Omega(G)$. Dafür werden wir das folgende Lemma benutzen.

Lemma 3.2.3 *Sei $\infty \in \Omega(G)$, und sei (g_n) eine Folge paarweise verschiedener Elemente von G. Ist $g_n = L_{\gamma_n}$ mit*

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix},$$

so gilt

$$\lim_{n\to\infty} |c_n| = \infty\,.$$

Beweis. Angenommen, $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n| = \infty$ gilt nicht. Dann gibt es eine Teilfolge von (g_n), die wir wieder mit (g_n) bezeichnen, mit

$$c_n \to c_0 \in \mathbb{C} \quad \text{für } n \to \infty. \tag{3.2.1}$$

Da $\infty \notin \Lambda(G)$, enthalten die Folgen $(g_n^{-1}(\infty))$, $(g_n(\infty))$ und $(g_n(0))$ keine gegen ∞ konvergierenden Teilfolgen. Das bedeutet, daß

$$|g_n^{-1}(\infty)| = \left|\frac{d_n}{c_n}\right| < M\,, \quad |g_n(\infty)| = \left|\frac{a_n}{c_n}\right| < M \quad \text{und} \quad |g_n(0)| = \left|\frac{b_n}{d_n}\right| < M$$

für ein $M > 0$ und alle $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, daß eine Teilfolge (n_k) von (n) existiert, für die die Folgen $(g_{n_k}^{-1}(\infty))$, $(g_{n_k}(\infty))$ und $(g_{n_k}(0))$ in $\mathbb{C}$ konvergieren, also

$$\frac{d_{n_k}}{c_{n_k}} \to \alpha_1\,, \quad \frac{a_{n_k}}{c_{n_k}} \to \alpha_2 \quad \text{und} \quad \frac{b_{n_k}}{d_{n_k}} \to \alpha_3$$

für $k \to \infty$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$. Dies impliziert zusammen mit (3.2.1), daß

$$d_{n_k} = c_{n_k}\frac{d_{n_k}}{c_{n_k}} \to c_0\alpha_1 =: d_0\,, \quad a_{n_k} = c_{n_k}\frac{a_{n_k}}{c_{n_k}} \to c_0\alpha_2 =: a_0 \quad \text{und} \quad b_{n_k} = d_{n_k}\frac{b_{n_k}}{d_{n_k}} \to d_0\alpha_3 =: b_0$$

für $k \to \infty$. Wegen $a_{n_k}d_{n_k} - b_{n_k}c_{n_k} = 1$ gilt $a_0d_0 - b_0c_0 = 1$. Wir erhalten insgesamt, daß

$$\gamma_{n_k} \to \gamma_0 := \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \quad \text{für } k \to \infty.$$

Hieraus leiten wir

$$\lim_{k\to\infty} g_{n_k}\left(L_{\gamma_0}^{-1}(\infty)\right) = L_{\gamma_0}\left(L_{\gamma_0}^{-1}(\infty)\right) = \infty$$

ab. Folglich ist ∞ im Widerspruch zur Voraussetzung ein Element von $\Lambda(G)$. □

Satz 3.2.4 *Sei $w \in \Omega(G)$. Dann ist $\Lambda(G) = \Lambda_w(G)$.*

Beweis. Indem wir Satz 3.1.7 und Lemma 3.2.1(ii) für eine Möbius-Transformation f mit $f(w) = \infty$ anwenden, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $w = \infty$.

Wir müssen $\Lambda(G) \subseteq \Lambda_\infty(G)$ zeigen. Sei also $z_0 \in \Lambda(G)$. Dann ist

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} g_n(w) \tag{3.2.2}$$

für ein $w \in \hat{\mathbb{C}}$ und eine Folge (g_n) paarweise verschiedener Elemente von G. Sei $g_n = L_{\gamma_n}$ mit

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

Ist $c_n = 0$, so ist $g_n(\infty) = \infty$. Da ∞ als Punkt in $\Omega(G)$ nicht Fixpunkt von unendlich vielen Transformationen aus G sein kann (vgl. Bemerkung 3.1.2), können wir folglich o.B.d.A. annehmen, daß $c_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir machen jetzt folgende Fallunterscheidung. Entweder gilt

(a) $|c_n w + d_n| \geq 1$ für alle $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ oder

(b) $|c_{n_k} w + d_{n_k}| < 1$ für eine Teilfolge (n_k) von (n).

Mit Hilfe von Lemma 3.2.3 erhalten wir im Fall (a), daß

$$|g_n(w) - g_n(\infty)| = \left| \frac{a_n w + b_n}{c_n w + d_n} - \frac{a_n}{c_n} \right| = \frac{1}{|c_n|\,|c_n w + d_n|} \leq \frac{1}{|c_n|} \to 0$$

für $n \to \infty$. Hieraus folgt zusammen mit (3.2.2), daß

$$|z_0 - g_n(\infty)| \leq |z_0 - g_n(w)| + |g_n(w) - g_n(\infty)| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

und somit $z_0 \in \Lambda_\infty(G)$.

Im Fall (b) haben wir

$$\left| w - g_{n_k}^{-1}(\infty) \right| = \left| w + \frac{d_{n_k}}{c_{n_k}} \right| = \left| \frac{c_{n_k} w + d_{n_k}}{c_{n_k}} \right| \leq \frac{1}{|c_{n_k}|} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty\,.$$

Demzufolge ist $w \in \Lambda_\infty(G)$. Nach Lemma 3.2.1(i) ist dann auch $g_n(w) \in \Lambda_\infty(G)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\Lambda_\infty(G)$ abgeschlossen ist (vgl. Satz 3.2.2), folgt

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} g_n(w) \in \Lambda_\infty(G)\,.$$

□

Bemerkung 3.2.5 Ist $w \in \Lambda(G)$, so gilt $\Lambda(G) = \Lambda_w(G)$ i.allg. nicht. Man betrachte z.B. die Kleinsche Gruppe $\langle m_\alpha \rangle$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$ mit $|\alpha| \neq 1$. Dann ist $\Lambda(\langle m_\alpha \rangle) = \{0, \infty\}$ (vgl. Satz 3.1.8), aber $\Lambda_0(\langle m_\alpha \rangle) = \{0\}$ und $\Lambda_\infty(\langle m_\alpha \rangle) = \{\infty\}$. □

Folgerung 3.2.6 *Die Limesmenge $\Lambda(G)$ ist abgeschlossen und der Diskontinuitätsbereich $\Omega(G)$ somit offen.*

Beweis. Ist $\Omega(G) = \emptyset$, so gilt die Behauptung trivialerweise. Ist $\Omega(G) \neq \emptyset$, so ist nach Satz 3.2.4 $\Lambda(G) = \Lambda_w(G)$ für $w \in \Omega(G)$, woraus die Behauptung mittels Satz 3.2.2 folgt. □

Im zweiten Teil dieses Abschnitts wollen wir zeigen, daß Kleinsche Gruppen diskret sind.

Definition 3.2.7 *Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ heißt diskret, falls zu jedem $x \in A$ ein solches $\varepsilon > 0$ existiert, daß*

$$\{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varepsilon\} \cap A = \{a\}\,.$$

Beispiel 3.2.8 Jede endliche Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist diskret. $\mathbb{N}$ und $\{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$ sind diskrete Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dagegen sind $\mathbb{Q}$ und $\{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ nicht diskret. □

Lemma 3.2.9 *Eine diskrete Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abzählbar.*

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ diskret. Nach Definition 3.2.7 können wir zu jedem $x \in A$ ein solches $\varepsilon(x) > 0$ wählen, daß

$$\|x - y\| \geq \varepsilon(x) \quad \text{für alle } y \in A. \tag{3.2.3}$$

Dann sind die Kugeln

$$U(x) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \frac{\varepsilon(x)}{2} \right\}$$

für $x \in A$ paarweise disjunkt. Um dies einzusehen, betrachten wir zwei verschiedenen Elemente x_1 und x_2 von A, wobei wir o.B.d.A. annehmen, daß $\varepsilon(x_1) \geq \varepsilon(x_2)$. Gilt $U(x_1) \cap U(x_2) \neq \emptyset$, so existiert ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\|x_1 - y\| < \frac{\varepsilon(x_1)}{2} \quad \text{und} \quad \|x_2 - y\| < \frac{\varepsilon(x_2)}{2}\,,$$

woraus mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - y\| + \|x_2 - y\| < \frac{\varepsilon(x_1)}{2} + \frac{\varepsilon(x_2)}{2} \leq \varepsilon(x_1)$$

folgt. Die letzte Ungleichung ist aber ein Widerspruch zu (3.2.3). Also gilt

$$U(x_1) \cap U(x_2) = \emptyset \quad \text{für } x_1 \neq x_2. \tag{3.2.4}$$

Da $\mathbb{Q}^n$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, ist

$$U(x) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset \quad \text{für jedes } x \in A.$$

Somit können wir zu jedem $x \in A$ ein $q(x) \in U(x) \cap \mathbb{Q}^n$ wählen. Wegen (3.2.4) ist die Zuordnung

$$x \in A \mapsto q(x) \in \mathbb{Q}^n$$

injektiv. Da außerdem $\mathbb{Q}^n$ abzählbar ist, folgt die Behauptung. □

Lemma 3.2.10 *Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann diskret, wenn keine Folge (x_n) in A mit*

(i) $x_n \neq x_m$ *für* $n \neq m$ *und*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$

existiert.

Beweis. Existiert eine Folge (x_n) in A mit (i) und (ii), so enthält die Menge $\{y \in \mathbb{R}^n : \|x_0 - y\| < \varepsilon\} \cap A$ mit $x_0 := \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$ für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Elemente. Also ist A in diesem Fall nicht diskret.

Ist umgekehrt A nicht diskret, so existieren ein $x_0 \in A$ und eine Folge (x_n) in A mit

$$x_n \neq x_0 \quad \text{und} \quad \|x_0 - x_n\| < \frac{1}{n} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Wie man leicht sieht, enthält dann (x_n) eine Teilfolge (x_{n_k}) mit (i) und (ii). □

Definition 3.2.11 *(i) Eine Teilmenge A von* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *heißt diskret, falls das Bild von A unter der Abbildung*

$$\mathcal{J} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \mapsto (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$$

eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{R}^8$ ist.

(ii) Eine Folge (γ_n) in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *konvergiert gegen ein $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, falls die Folge $(\mathcal{J}(\gamma_n))$ gegen $\mathcal{J}(\gamma)$ konvergiert.*

Bemerkung 3.2.12 Offensichtlich konvergiert eine Folge (γ_n) in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ mit

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

genau dann gegen

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \, ,$$

wenn

$$a_n \to a \, , \quad b_n \to b \, , \quad c_n \to c \quad \text{und} \quad d_n \to d$$

für $n \to \infty$. □

Lemma 3.2.13 *Eine Untergruppe Γ von* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *ist genau dann diskret, wenn keine Folge (γ_n) in Γ mit*

(i) $\gamma_n \neq \gamma_m$ *für $n \neq m$ und*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = e$

existiert.

Beweis. Ist (γ_n) eine Folge in Γ mit (i) und

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma \in \Gamma \, ,$$

so ist $(\gamma^{-1}\gamma_n)$ eine Folge in Γ mit (i) und (ii). Somit folgt die Behauptung nach Definition 3.2.11 aus Lemma 3.2.10. □

Satz 3.2.14 *Sei $G \subseteq \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ eine Kleinsche Gruppe. Dann ist die Gruppe*

$$\Gamma := \{\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) : L_\gamma \in G\}$$

diskret.

Beweis. Angenommen, Γ ist nicht diskret. Dann existiert nach Lemma 3.2.13 eine Folge (γ_n) paarweise verschiedener Elemente von Γ mit

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = e \, .$$

Daraus folgt (vgl. Bemerkung 3.2.12), daß

$$\lim_{n\to\infty} L_{\gamma_n}(z) = z \quad \text{für jedes } z \in \hat{\mathbb{C}}$$

und somit $\Lambda(G) = \hat{\mathbb{C}}$. Das bedeutet, daß G keine Kleinsche Gruppe ist. □

Eine unmittelbare Konsequenz aus Lemma 3.2.9 und Satz 3.2.14 ist

Folgerung 3.2.15 *Ist $G \subseteq \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ eine Kleinsche Gruppe, so ist G abzählbar.* □

Das folgende Beispiel zeigt, daß nicht jede Gruppe G von Möbius-Transformationen, für die $\{\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) : L_\gamma \in G\}$ diskret ist, eine Kleinsche Gruppe ist.

Beispiel 3.2.16 Sei

$$\Gamma_{\mathrm{Pic}} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) : a,b,c,d \in \mathbb{Z} + \mathrm{i}\mathbb{Z} \right\} ,$$

und sei

$$G_{\mathrm{Pic}} := \left\{ L_\gamma \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) : \gamma \in \Gamma_{\mathrm{Pic}} \right\} .$$

Die Gruppe G_{Pic} wird Picard-Gruppe genannt.

Offensichtlich ist Γ_{Pic} diskret. G_{Pic} ist jedoch keine Kleinsche Gruppe. Dies kann man folgendermaßen einsehen. Da $m_1 \in G_{\mathrm{Pic}}$, gilt nach Satz 3.1.5 und Satz 3.1.8, daß

$$\{\infty\} = \Lambda(\langle m_1 \rangle) \subseteq \Lambda(G_{\mathrm{Pic}}) . \tag{3.2.5}$$

Sei $z \in \mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$. Dann existieren $a, c \in \mathbb{Z} + \mathrm{i}\mathbb{Z}$ mit

$$z = \frac{a}{c} .$$

Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, daß a und c teilerfremd sind. Das bedeutet, daß

$$\frac{a}{\alpha} \in \mathbb{Z} + \mathrm{i}\mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \frac{c}{\alpha} \in \mathbb{Z} + \mathrm{i}\mathbb{Z} \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{Z} + \mathrm{i}\mathbb{Z}$$

dann und nur dann gilt, wenn

$$\alpha \in (\mathbb{Z} + \mathrm{i}\mathbb{Z})^* := \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\} .$$

Folglich existieren solche $b, d \in \mathbb{Z} + \mathrm{i}\mathbb{Z}$, daß

$$ad - bc = 1 .$$

Dann ist

$$\gamma_z := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_{\mathrm{Pic}} \quad \text{und} \quad L_{\gamma_z}(\infty) = z . \tag{3.2.6}$$

Da $\Lambda(G_{\mathrm{Pic}})$ G_{Pic}-invariant ist (siehe Satz 3.1.6), implizieren (3.2.5) und (3.2.6), daß $z \in \Lambda(G_{\mathrm{Pic}})$. Also gilt

$$\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q} \subseteq \Lambda(G_{\mathrm{Pic}}) .$$

Hieraus und aus der Tatsache, daß die Limesmenge nach Folgerung 3.2.6 abgeschlossen ist, folgt schließlich

$$\Lambda(G_{\mathrm{Pic}}) = \hat{\mathbb{C}} .$$

□