Analysis I

Lutz Habermann

Oktober 2003

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Festlegungen und Bezeichnungen

Seien A und B **Aussagen**, also sprachliche Ausdrücke, die entweder gelten oder nicht gelten, also entweder wahr oder falsch sind.

$\boxed{A \Longrightarrow B}$ bedeutet: Aus A folgt B. Man sagt auch: A impliziert B.

$\boxed{A \Longleftrightarrow B}$ bedeutet: A gilt genau dann, wenn B gilt. Man sagt auch: A und B sind gleichbedeutend (äquivalent).

Insbesondere sind $A \Longrightarrow B$ und $A \Longleftrightarrow B$ wiederum Aussagen. Dabei ist $A \Longrightarrow B$ dann und nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist. Die Aussage $A \Longleftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A und B den gleichen Wahrheitswert haben.

Als Beispiel geben wir an, dass für jede natürliche Zahl n die Aussagen

$$4 \text{ teilt } n \quad \Longrightarrow \quad 2 \text{ teilt } n$$

und

$$6 \text{ teilt } n \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n$$

gelten.

Wir verwenden den Mengenbegriff im Sinne der Mengendefinition von Georg Cantor (1845-1918). Wir legen also fest: Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten, genannt **Elemente**, zu einem Ganzen.

$\boxed{x \in M}$ bedeutet: x ist ein Element der Menge M. Man sagt hierfür auch: M enthält x.

$\boxed{x \notin M}$ bedeutet: x ist kein Element der Menge M.

Wir nennen zwei Mengen M und N gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Wir schreiben dann $\boxed{M = N}$, andernfalls $\boxed{M \neq N}$. Für zwei Mengen M und N gilt also

$$M = N \quad \Longleftrightarrow \quad (x \in M \quad \Longleftrightarrow \quad x \in N)\,.$$

Mengen können beschrieben werden durch

(a) Angabe der Elemente, z.B.:

- $\{a, b\}$ ist die Menge, deren Elemente a und b sind.
- $\{3, 4, \ldots, 15\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen von 3 bis 15.

- $\{2, 4, 6, \ldots\}$ ist die Menge aller geraden natürlichen Zahlen.

(b) Angabe einer definierenden Eigenschaft:

$\{x : E(x)\}$ ist die Menge aller x, für die die Aussage $E(x)$ wahr ist, also z.B.

$$\{x : x \text{ ist eine gerade natürliche Zahl}\} .$$

$\{x \in M : E(x)\}$ ist die Menge aller Elemente x von M, für die $E(x)$ gilt. Es ist also

$$\{x \in M : E(x)\} = \{x : x \in M \text{ und } E(x)\} .$$

Statt $\{x_i : i \in J\}$ für eine Indexmenge J werden wir auch $\{x_i\}_{i \in J}$ schreiben.

Die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$, die Menge der ganzen Zahlen mit $\mathbb{Z}$, die Menge der rationalen Zahlen mit $\mathbb{Q}$ und die Menge der reellen Zahlen mit $\mathbb{R}$. Somit ist

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\} , \\ \mathbb{Z} &= \{x : x \in \mathbb{N} \text{ oder } -x \in \mathbb{N} \text{ oder } x = 0\} \quad \text{und} \\ \mathbb{Q} &= \left\{x : x = \frac{m}{n} \text{ und } m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}\right\} . \end{aligned}$$

Die Menge $\{0, 1, 2, \ldots\}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{N}_0$. Die leere Menge, also die Menge, die kein Element enthält, bezeichnen wir mit $\emptyset$.

Wir werden in der Vorlesung auch Mengen betrachten, deren Elemente wieder Mengen sind. Solche Mengen werden wir zur Unterscheidung **Mengensysteme** oder einfach **Systeme** nennen. Die Antinomie von Betrand Russell (1872-1970) werden wir dadurch umgehen, dass alle in der Vorlesung auftretenden Mengen M der Bedingung $M \notin M$ genügen.

Wir führen folgende Symbole ein.

- $\forall$ bedeutet "für alle",
- $\exists$ bedeutet "es existiert ein" (im Sinne von: "es existiert mindestens ein"),
- $\exists!$ bedeutet "es existiert genau ein",
- $:\Longleftrightarrow$ bedeutet "ist definiert durch",
- $:=$ bedeutet "ist definiert als" bzw. "wird gesetzt".

Der Ausdruck $\boxed{\forall x : E(x)}$ ist somit zu lesen als: Für alle x gilt $E(x)$. Der Ausdruck $\boxed{\exists x : E(x)}$ bedeutet: Es existiert ein x, für das $E(x)$ gilt. Oder kürzer: Es existiert ein x mit $E(x)$.

Wir erläutern die eben eingeführten Symbole an einigen Beispielen.

- Die Tatsache, dass jede natürliche Zahl auch eine ganze Zahl ist, können wir in der Form

  $$\forall n : (n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n \in \mathbb{Z})$$

  oder

  $$\forall n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{Z}$$

  schreiben.

- Die Zeile

  $$\exists! \, n : (n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } n \notin \mathbb{N})$$

  drückt aus, dass es genau ein n gibt, das ein Element von $\mathbb{N}_0$ und kein Element von $\mathbb{N}$ ist.

- Durch

  $$n \in \mathbb{Z} \text{ heißt } \textbf{gerade} :\Longleftrightarrow 2 \text{ teilt } n.$$

  wird definiert, wann eine ganze Zahl gerade heißt. Dabei ist das, was definiert werden soll, nämlich "gerade", hervorgehoben. Bei Definitionen in dieser Vorlesung wollen wir auch so verfahren.

- Um die Bezeichnung $\mathbb{N}_0$ einzuführen, könnten wir auch einfach

  $$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$$

  schreiben. Die leere Menge $\emptyset$ könnten wir nach unseren Festlegungen durch

  $$\emptyset := \{\ \}$$

  oder auch

  $$\emptyset := \{x : x \neq x\}$$

  erklären.

1.2 Teilmengen und Verknüpfungen von Mengen

Seien M und N Mengen.

Definition 1.2.1 *N heißt* **Teilmenge** *von M (in Zeichen: $N \subseteq M$)* $:\Longleftrightarrow$

$$x \in N \implies x \in M\ .$$

N heißt **echte Teilmenge** *von M (in Zeichen: $N \subset M$)* $:\Longleftrightarrow$

$$N \subseteq M \quad \textit{und} \quad N \neq M\ .$$

Das Mengensystem

$$\mathcal{P}(M) := \{N : N \subseteq M\}$$

wird **Potenzmenge** *von M genannt.*

Ist N keine (bzw. keine echte) Teilmenge von M, so schreiben wir $N \not\subseteq M$ (bzw. $N \not\subset M$).

Beispiel 1.2.2 (i) Für jede Menge M gilt $\emptyset \subseteq M$. Insbesondere ist $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Die Potenzmenge der leeren Menge ist also nicht die leere Menge.

(ii) Ist $M = \{a, b\}$, so ist

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}\ .$$

□

Satz 1.2.3 *Für alle Mengen M, N, L gilt:*

(i) $M \subseteq M$,

(ii) $M \subseteq N$ *und* $N \subseteq L \implies M \subseteq L$,

(iii) $M \subseteq N$ *und* $N \subseteq M \implies M = N$.

Beweis. (i) Das ist offensichtlich.

(ii) Wir folgern

$$\begin{aligned}
&M \subseteq N \text{ und } N \subseteq L \\
&\quad \Longrightarrow \quad (x \in M \Longrightarrow x \in N) \text{ und } (x \in N \Longrightarrow x \in L) \\
&\quad \Longrightarrow \quad (x \in M \Longrightarrow x \in L) \\
&\quad \Longrightarrow \quad M \subseteq L\,.
\end{aligned}$$

(iii) Wir schließen

$$\begin{aligned}
&M \subseteq N \text{ und } N \subseteq M \\
&\quad \Longrightarrow \quad (x \in M \Longrightarrow x \in N) \text{ und } (x \in N \Longrightarrow x \in M) \\
&\quad \Longrightarrow \quad (x \in M \Longleftrightarrow x \in N) \\
&\quad \Longrightarrow \quad M = N\,.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.2.4 Satz 1.2.3(iii) liefert ein wichtiges Beweisprinzip. Um nämlich $M = N$ zu beweisen, genügt es, $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ zu zeigen. □

Satz 1.2.5 *Für alle Mengen M, N, L gilt:*

(i) $M \not\subset M$,

(ii) $M \subset N$ *und* $N \subset L \Longrightarrow M \subset L$,

(iii) $M \subset N \Longrightarrow N \not\subset M$.

Beweis. (i) Da $M = M$, kann $M \subset M$ nicht gelten.

(ii) Wir wenden Satz 1.2.3 an. Zunächst sehen wir

$$M \subset N \text{ und } N \subset L \quad \Longrightarrow \quad M \subseteq N \text{ und } N \subseteq L \quad \Longrightarrow \quad M \subseteq L\,.$$

Zu zeigen bleibt

$$M \subset N \text{ und } N \subset L \quad \Longrightarrow \quad M \neq L\,. \tag{1.2.1}$$

Wir beweisen (1.2.1) indirekt, d.h. wir nehmen an, dass die linke Seite von (1.2.1) gilt, die rechte aber nicht, und führen dies zu einem Widerspruch. Wir schließen

$$\begin{aligned}
M \subset N\,,\;\; N \subset L \text{ und } M = L \quad &\Longrightarrow \quad M \neq N\,,\;\; M \subseteq N \text{ und } N \subseteq M \\
&\Longrightarrow \quad M \neq N \text{ und } N = M\,.
\end{aligned}$$

Da die letzte Aussage in dieser Schlusskette immer falsch ist, haben wir damit (1.2.1) bewiesen.

(iii) Wir beweisen auch diese Aussage indirekt. Nach (ii) gilt

$$M \subset N \text{ und } N \subset M \quad \Longrightarrow \quad M \subset M\,.$$

Da aber nach (i) stets $M \not\subset M$, folgt die Behauptung. □

Definition 1.2.6 *Die Menge*

$$M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$$

heißt **Vereinigung** *von M und N. Die Menge*

$$M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$$

heißt **Durchschnitt** *von M und N. Zwei Mengen M und N heißen* **disjunkt** $:\Longleftrightarrow M \cap N = \emptyset$.

Satz 1.2.7 *Für alle Mengen M, N, L gilt:*

(i) $M \cup N = N \cup M$ *und* $M \cap N = N \cap M$, *(Kommutativgesetze)*

(ii) $(M \cup N) \cup L = M \cup (N \cup L)$ *und* $(M \cap N) \cap L = M \cap (N \cap L)$, *(Assoziativgesetze)*

(iii) $M \cup (M \cap N) = M$ *und* $M \cap (M \cup N) = M$, *(Verschmelzungsgesetze)*

(iv) $(M \cup N) \cap L = (M \cap L) \cup (N \cap L)$ *und* $(M \cap N) \cup L = (M \cup L) \cap (N \cup L)$. *(Distributivgesetze)*

Beweis. Dies führt man unmittelbar auf Gesetze der Logik zurück. Zum Beispiel schließt man für den Beweis des ersten Verschmelzungsgesetzes

$$\begin{aligned} x \in M \cup (M \cap N) &\iff x \in M \text{ oder } x \in M \cap N \\ &\iff x \in M \text{ oder } (x \in M \text{ und } x \in N) \\ &\iff x \in M \,. \end{aligned}$$

□

Definition 1.2.8 *Die Menge*

$$M \setminus N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$$

heißt **Differenz** *von M und N. Ist M eine Teilmenge einer fixierten Grundmenge E, so heißt die Menge*

$$\mathbf{C}M := E \setminus M$$

Komplement *von M (bezüglich E).*

Satz 1.2.9 *Für alle Mengen M, N, L gelten die folgenden Distributivgesetze:*

(i) $(M \cup N) \setminus L = (M \setminus L) \cup (N \setminus L)$,

(ii) $(M \cap N) \setminus L = (M \setminus L) \cap (N \setminus L)$,

(iii) $M \setminus (N \cup L) = (M \setminus N) \cap (M \setminus L)$,

(iv) $M \setminus (N \cap L) = (M \setminus N) \cup (M \setminus L)$.

Beweis. Übung. □

Satz 1.2.10 *Für alle Teilmengen M, N einer Grundmenge E gilt*

$$\mathbf{C}(M \cup N) = \mathbf{C}M \cap \mathbf{C}N \quad \text{und} \quad \mathbf{C}(M \cap N) = \mathbf{C}M \cup \mathbf{C}N. \qquad \text{(de Morgansche Regeln)}$$

Beweis. Nach Definition des Komplements und nach Satz 1.2.9(iii) und (iv) haben wir

$$\mathbf{C}(M \cup N) = E \setminus (M \cup N) = (E \setminus M) \cap (E \setminus N) = \mathbf{C}M \cap \mathbf{C}N$$

und

$$\mathbf{C}(M \cap N) = E \setminus (M \cap N) = (E \setminus M) \cup (E \setminus N) = \mathbf{C}M \cup \mathbf{C}N \,.$$

□

Definition 1.2.11 *Ist $\{M_i\}_{i\in J}$ ein Mengensystem, so wird*

$$\bigcup_{i\in J} M_i := \{x : (\exists\, i \in J : x \in M_i)\}$$

Vereinigung *und*

$$\bigcap_{i\in J} M_i := \{x : (\forall\, i \in J : x \in M_i)\}$$

Durchschnitt *von $\{M_i\}_{i\in J}$ genannt.*

Beispiel 1.2.12 Für jede Menge M gilt

$$\bigcup_{N\in\mathcal{P}(M)} N = M \quad \text{und} \quad \bigcap_{N\in\mathcal{P}(M)} N = \emptyset\,.$$

□

Der nächste Satz verallgemeinert die de Morganschen Regeln.

Satz 1.2.13 *Für jedes System $\{M_i\}_{i\in J}$ von Teilmengen M_i einer Grundmenge E gilt*

$$\mathbf{C}\bigcup_{i\in J} M_i = \bigcap_{i\in J} \mathbf{C}M_i \quad \textit{und} \quad \mathbf{C}\bigcap_{i\in J} M_i = \bigcup_{i\in J} \mathbf{C}M_i\,.$$

Beweis. Übung. □

Sei im folgenden $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Ein **n-Tupel** ist ein Ausdruck der Form $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wobei

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = y_i\,.$$

Insbesondere ist ein 2-Tupel ein geordnetes Paar.

Bemerkung 1.2.14 Der Begriff des n-Tupels kann folgendermaßen auf Mengen zurückgeführt werden. Man setzt zunächst

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

und definiert für $n \in \{3, 4, \ldots\}$ rekursiv

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) := ((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)\ .$$

□

Definition 1.2.15 *Das* **(kartesische) Produkt** *von n Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ist*

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : (\forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : x_i \in M_i)\}\ .$$

Die **n-te Potenz** *einer Menge M ist*

$$M^n := \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{n\text{-mal}}\ .$$

Außerdem ist

$$M^1 := M\ .$$

Insbesondere ist

$$M \times N = \{(x, y) : x \in M \text{ und } y \in N\}\ .$$

Satz 1.2.16 *Für alle Mengen M, N, L gilt:*

(i) $M \times N = \emptyset \Longleftrightarrow M = \emptyset$ *oder* $N = \emptyset$,

(ii) $(M \cup N) \times L = (M \times L) \cup (N \times L)$ *und* $M \times (N \cup L) = (M \times N) \cup (M \times L)$,

(iii) $(M \cap N) \times L = (M \times L) \cap (N \times L)$ *und* $M \times (N \cap L) = (M \times N) \cap (M \times L)$,

(iv) $(M \setminus N) \times L = (M \times L) \setminus (N \times L)$ *und* $M \times (N \setminus L) = (M \times N) \setminus (M \times L)$.

Beweis. (i) Wir müssen zeigen

$$M \times N = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad M = \emptyset \text{ oder } N = \emptyset \tag{1.2.2}$$

und

$$M = \emptyset \text{ oder } N = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad M \times N = \emptyset\,. \tag{1.2.3}$$

Nach der so genannten Kontrapositionsregel gilt (1.2.2) genau dann, wenn

$$M \neq \emptyset \text{ und } N \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad M \times N \neq \emptyset\,. \tag{1.2.4}$$

Genauso ist (1.2.3) äquivalent zu

$$M \times N \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad M \neq \emptyset \text{ und } N \neq \emptyset\,. \tag{1.2.5}$$

Zum Beweis von (1.2.4) schließen wir

$$\begin{aligned} M \neq \emptyset \text{ und } N \neq \emptyset \quad &\Longrightarrow \quad \exists\, x : x \in M \text{ und } \exists\, y : y \in N \\ &\Longrightarrow \quad \exists\,(x, y) : (x \in M \text{ und } y \in N) \\ &\Longrightarrow \quad \exists\,(x, y) : (x, y) \in M \times N \\ &\Longrightarrow \quad M \times N \neq \emptyset\,. \end{aligned}$$

Da alle Implikationen dieser Schlusskette umgekehrt werden können, gilt auch (1.2.5). Damit ist die Behauptung (i) bewiesen.

(ii),(iii),(iv) Übung. □

1.3 Abbildungen

Seien M und N nichtleere Mengen. Eine **Abbildung** f von M in N, bezeichnet mit $f : M \to N$, ist eine Vorschrift, welche jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$, bezeichnet mit $f(x)$, zuordnet. Statt Abbildung sagt man auch **Funktion**. Wollen wir die Zuordnungsvorschrift einer Abbildung f genauer angeben, so schreiben wir

$$f : M \to N\,, \quad f(x) = y\,,$$

oder

$$f : M \to N\,, \quad x \mapsto f(x)\,,$$

also z.B.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = 2x + 5\,,$$

oder

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto 2x + 5\,.$$

Manchmal geben wir Abbildungen auch nur in der Form

$$x \in M \mapsto y \in N$$

an, z.B.

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto x_1 + x_2 \in \mathbb{R} \, .$$

Ist f eine Abbildung von M in N, so wird die Menge M **Definitionsbereich** und die Menge

$$f(M) := \{y \in N : (\exists\, x \in M : y = f(x))\}$$

Wertebereich von f genannt. Außerdem nennt man die Menge

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, y) \in M \times N : y = f(x)\}$$

Graph von f.

Bemerkung 1.3.1 Auch der Abbildungsbegriff kann auf Mengen zurückgeführt werden und zwar dadurch, dass man eine Abbildung mit ihrem Graph identifiziert. Eine Abbildung von M in N ist dann eine Menge $F \subseteq M \times N$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall\, x \in M\ \exists!\, y \in N : (x, y) \in F \, .$$

$\square$

Definition 1.3.2 *Sei eine Abbildung $f : M \to N$ gegeben und sei $U \subseteq M$ und $V \subseteq N$. Dann heißt*

$$f(U) := \{y \in N : (\exists\, x \in U : y = f(x))\}$$

Bild *von U und*

$$f^{-1}(V) := \{x \in M : f(x) \in V\}$$

Urbild *von V.*

Beispiel 1.3.3 Für die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^2$, ist

$$f(\{0, 1, 2\}) = \{0, 1, 4\} \quad \text{und} \quad f^{-1}(\{0, 1, 4\}) = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \, .$$

$\square$

Satz 1.3.4 *Für jede Abbildung $f : M \to N$ und für alle $U, V \subseteq M$ gilt:*

(i) $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$,

(ii) $f(U \cap V) \subseteq f(U) \cap f(V)$,

(iii) $f(M) \setminus f(U) \subseteq f(M \setminus U)$.

Beweis. (i),(ii) Übung.
(iii) Zu zeigen ist

$$y \in f(M) \setminus f(U) \quad \Longrightarrow \quad y \in f(M \setminus U) \, .$$

Wir folgern

$$\begin{aligned}
y \in f(M) \setminus f(U) \quad &\Longrightarrow \quad y \in f(M) \ \text{ und } \ y \notin f(U) \\
&\Longrightarrow \quad \exists\, x \in M : y = f(x) \ \text{ und } \ \forall\, x \in U : y \neq f(x) \\
&\Longrightarrow \quad \exists\, x \in M : (y = f(x) \ \text{ und } \ x \notin U) \\
&\Longrightarrow \quad \exists\, x \in M \setminus U : y = f(x) \\
&\Longrightarrow \quad y \in f(M \setminus U) \, .
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 1.3.5 *Für jede Abbildung* $f : M \to N$ *und für alle* $U, V \subseteq N$ *gilt:*

(i) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$,

(ii) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$,

(iii) $f^{-1}(N \setminus U) = M \setminus f^{-1}(U)$.

Beweis. Übung. □

Definition 1.3.6 (i) *Die* **Einschränkung** *einer Abbildung* $f : M \to N$ *auf eine nichtleere Menge* $L \subseteq M$ *ist*

$$f\big|_L : L \to N\ , \quad f\big|_L(x) = f(x)\ .$$

(ii) *Seien* $f : M \to N$ *und* $g : K \to L$ *Abbildungen mit* $f(M) \subseteq K$*. Dann heißt die Abbildung*

$$g \circ f : M \to L\ , \quad g \circ f(x) = g(f(x))\ ,$$

Verkettung *oder* **Komposition** *von* f *und* g*.*

Beispiel 1.3.7 Wir betrachten

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad f(x) = x + 1\ ,$$

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad g(x) = 2x\ .$$

Dann ist

$$g \circ f(x) = 2x + 2 \quad \text{und} \quad f \circ g(x) = 2x + 1 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}\ .$$

□

Definition 1.3.8 (i) *Eine Abbildung* $f : M \to N$ *heißt* **injektiv** *oder* **eineindeutig** $:\iff$

$$x_1, x_2 \in M \ \text{ und } \ f(x_1) = f(x_2) \quad \implies \quad x_1 = x_2\ .$$

(ii) $f : M \to N$ *heißt* **surjektiv** *oder Abbildung* **auf** $N :\iff f(M) = N$.

(iii) $f : M \to N$ *heißt* **bijektiv** $:\iff f$ *ist injektiv und surjektiv.*

Beispiel 1.3.9 (i) Sei $f : M \to N$ **konstant**, d.h.

$$\exists\, c \in N\, \forall\, x \in M : f(x) = c\ .$$

Dann ist f genau dann injektiv (bzw. surjektiv), wenn M (bzw. N) genau ein Element enthält.

(ii) Sei $M \subseteq N$. Die so genannte **Inklusion**

$$\mathrm{i}_M : M \to N\ , \quad x \mapsto x\ ,$$

ist ein Beispiel für eine injektive Abbildung.

(iii) Die so genannten **Projektionen**

$$\mathrm{pr}_M : M \times N \to M\ , \quad (x, y) \mapsto x\ ,$$

und

$$\mathrm{pr}_N : M \times N \to N\ , \quad (x, y) \mapsto y\ ,$$

sind surjektiv.

(iv) Die Abbildung

$$\mathrm{id}_M : M \to M \ , \quad x \mapsto x \ ,$$

ist bijektiv. Sie wird **identische Abbildung** von M genannt.

$\square$

Ist $f : M \to N$ injektiv, so existiert genau eine Abbildung $g : f(M) \to M$ mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_M \ .$$

Diese Abbildung heißt **Umkehrabbildung** oder **inverse Abbildung** zu f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Satz 1.3.10 *Sei $f : M \to N$ injektiv. Dann gilt*

$$\mathrm{Graph}\left(f^{-1}\right) = \{(y, x) : (x, y) \in \mathrm{Graph}(f)\} \ .$$

Beweis. Übung. $\square$

Wir benötigen noch:

Definition 1.3.11 *Zwei Abbildungen $f : M \to N$ und $g : M \to N$ heißen* **gleich** *(in Zeichen: $f = g$)* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, x \in M : f(x) = g(x) \ .$$

Kapitel 2

Zahlen

2.1 Axiomatik der reellen Zahlen

Im Folgenden stellen wir die Axiome der reellen Zahlen zusammen, d.h. wir geben die Eigenschaften an, durch die die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen eindeutig charakterisiert ist. Allein auf diesen Axiomen und den im Kapitel 1 eingeführten Begriffen werden wir die Analysis aufbauen. Wir werden hier nicht darauf eingehen, ob es überhaupt eine Menge $\mathbb{R}$ gibt, die die geforderten Axiome erfüllt, und ob eine solche Menge durch diese Axiome eindeutig bestimmt ist.

Die Axiome der reellen Zahlen unterteilen sich in drei Gruppen, nämlich in

- die Körperaxiome,
- die Anordnungsaxiome und
- das Vollständigkeitsaxiom.

Körperaxiome. Reelle Zahlen können addiert und multipliziert werden, d.h. es gibt Abbildungen

$$(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto a + b \in \mathbb{R}$$

und

$$(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto a \cdot b \in \mathbb{R}\,.$$

Dabei gilt:

(A1) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $a + b = b + a$. *(Kommutativgesetz der Addition)*

(A2) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist $(a + b) + c = a + (b + c)$. *(Assoziativgesetz der Addition)*

(A3) Es gibt eine reelle Zahl, genannt **Null** und bezeichnet mit 0, mit der Eigenschaft, dass $a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$. *(Existenz der Null)*

(A4) Zu jeder reellen Zahl a gibt es eine reelle Zahl, bezeichnet mit $-a$, mit der Eigenschaft, dass $a + (-a) = 0$. *(Existenz der entgegengesetzten Zahl)*

(A5) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $a \cdot b = b \cdot a$. *(Kommutativgesetz der Multiplikation)*

(A6) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. *(Assoziativgesetz der Multiplikation)*

(A7) Es gibt eine von Null verschiedene reelle Zahl, genannt **Eins** und bezeichnet mit 1, mit der Eigenschaft, dass $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$. *(Existenz der Eins)*

(A8) Zu jeder reellen Zahl $a \neq 0$ gibt es eine reelle Zahl, bezeichnet mit a^{-1}, mit der Eigenschaft, dass $a \cdot a^{-1} = 1$. *(Existenz der reziproken Zahl)*

(A9) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. *(Distributivgesetz)*

Bemerkung 2.1.1 Die Axiome (A1)-(A9) besagen, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein **Körper** ist. □

Statt $a \cdot b$ werden wir meist nur ab schreiben, statt $a + (-b)$ einfach $a - b$ und statt ab^{-1} auch $\frac{a}{b}$, manchmal auch a/b.

Wir werden jetzt einige Schlussfolgerungen aus den Körperaxiomen ziehen. Zunächst bemerken wir, dass wir wegen (A2) und (A6) bei mehrfachem Addieren bzw. mehrfachem Multiplizieren keine Klammern setzen müssen. Wir können also z.B. einfach $a + b + c$ bzw. abc schreiben.

Satz 2.1.2 *Die Null und die Eins sind eindeutig bestimmt.*

Beweis. Ist $0' \in \mathbb{R}$ derart, dass $a + 0' = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$, so ist insbesondere

$$0 + 0' = 0 \, . \tag{2.1.1}$$

Nach (A3) gilt

$$0' + 0 = 0' \, . \tag{2.1.2}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0' && \text{(nach (2.1.1))} \\ &= 0' + 0 && \text{(nach (A1))} \\ &= 0' \, . && \text{(nach (2.1.1))} \end{aligned}$$

Analog zeigt man die Eindeutigkeit der Eins. □

Satz 2.1.3 *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) *Die Gleichung $a + x = b$ hat genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Ist $a \neq 0$, so hat die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis. (i) Ist x eine Lösung der Gleichung, so haben wir

$$\begin{aligned} a + x = b \quad &\Longrightarrow \quad -a + a + x = -a + b \\ &\Longrightarrow \quad x + a - a = -a + b && \text{(nach (A1))} \\ &\Longrightarrow \quad x + 0 = -a + b && \text{(nach (A4))} \\ &\Longrightarrow \quad x = -a + b \, . && \text{(nach (A3))} \end{aligned}$$

Andererseits löst $-a + b$ die Gleichung, denn

$$\begin{aligned} a - a + b &= 0 + b && \text{(nach (A4))} \\ &= b + 0 && \text{(nach (A1))} \\ &= b \, . && \text{(nach (A3))} \end{aligned}$$

(ii) Analog. □

Eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 2.1.3 ist

Folgerung 2.1.4 *Für jedes $a \in \mathbb{R}$ (bzw. $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ist die entgegengesetzte Zahl $-a$ (bzw. die reziproke Zahl a^{-1}) eindeutig bestimmt.* $\square$

Aus den Körperaxiomen können alle bekannten Regeln für das Addieren und Multiplizieren reeller Zahlen abgeleitet werden. Einige dieser Regeln sind in den nächsten beiden Sätzen aufgeführt.

Satz 2.1.5 *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $-(-a) = a$,

(ii) $(-a) + (-b) = -(a + b)$,

(iii) $0 \cdot a = 0$,

(iv) $a(-b) = -(ab)$,

(v) $(-a)(-b) = ab$,

(vi) $ab = 0 \Longrightarrow a = 0$ *oder* $b = 0$.

Beweis. (i) Zu zeigen ist

$$-a + a = 0 \,.$$

Dies gilt, denn

$$\begin{aligned} -a + a &= a + (-a) && \text{(nach (A1))} \\ &= 0 \,. && \text{(nach (A4))} \end{aligned}$$

(ii) Übung.

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} 0 \cdot a &= (0 + 0) \cdot a && \text{(nach (A3))} \\ &= 0 \cdot a + 0 \cdot a && \text{(nach (A9))} \end{aligned}$$

und

$$0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 \,. \qquad \text{(nach (A3))}$$

Mit Satz 2.1.3(i) folgt

$$0 \cdot a = 0 \,.$$

(iv),(v) Übung.

(vi) Sei $ab = 0$. Wir zeigen mittels Fallunterscheidung, dass dann $a = 0$ oder $b = 0$.

1. Fall: $b = 0$. Dann ist nichts mehr zu beweisen.

2. Fall: $b \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} abb^{-1} &= a \cdot 1 && \text{(nach (A8))} \\ &= a && \text{(nach (A7))} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} abb^{-1} &= 0 \cdot b^{-1} && \text{(wegen } ab = 0\text{)} \\ &= 0 \,, && \text{(nach (iii))} \end{aligned}$$

woraus $a = 0$ folgt.

$\square$

Satz 2.1.6 *Für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:*

(i) $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$,

(ii) $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$.

Beweis. Übung. $\square$

Anordnungsaxiome. Es existiert eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, genannt **Menge der positiven reellen Zahlen** und bezeichnet mit $\mathbb{R}_+$, mit folgenden Eigenschaften.

(A10) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen

$$a \in \mathbb{R}_+ \,, \quad -a \in \mathbb{R}_+ \,, \quad a = 0 \,.$$

(Trichotomiegesetz)

(A11) $a \in \mathbb{R}_+$ und $b \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow a + b \in \mathbb{R}_+$. *(Monotoniegesetz der Addition)*

(A12) $a \in \mathbb{R}_+$ und $b \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}_+$. *(Monotoniegesetz der Multiplikation)*

Bemerkung 2.1.7 Die Axiome (A1)-(A12) besagen, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein **angeordneter Körper** ist. $\square$

Ist $a \in \mathbb{R}_+$ (bzw. $-a \in \mathbb{R}_+$), so wird a **positiv** (bzw. **negativ**) genannt. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und ist $b - a \in \mathbb{R}_+$, so schreiben wir $a < b$ oder auch $b > a$.

Als wichtige Regeln für das Rechnen mit $<$ und $>$ haben wir:

Satz 2.1.8 *Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $a < b$ *und* $b < c \Longrightarrow a < c$, *(Transitivität)*

(ii) $a < b \Longrightarrow a + c < b + c$,

(iii) $a < b \Longrightarrow -a > -b$,

(iv) $a < b$ *und* $c > 0$ *(bzw.* $c < 0$*)* $\Longrightarrow ac < bc$ *(bzw.* $ac > bc$*)*,

(v) $a > 0$ *(bzw.* $a < 0$*)* $\Longrightarrow a^{-1} > 0$ *(bzw.* $a^{-1} < 0$*)*,

(vi) $0 < a < b \Longrightarrow ab^{-1} < 1$, $ba^{-1} > 1$ *und* $a^{-1} > b^{-1}$.

Beweis. (i) Wir schließen

$$\begin{array}{rcll} a < b \text{ und } b < c & \Longrightarrow & b - a \in \mathbb{R}_+ \text{ und } c - b \in \mathbb{R}_+ & \\ & \Longrightarrow & b - a + c - b \in \mathbb{R}_+ & \text{(nach (A11))} \\ & \Longrightarrow & c - a + b - b \in \mathbb{R}_+ & \text{(nach (A1))} \\ & \Longrightarrow & c - a \in \mathbb{R}_+ & \text{(nach (A3) und (A4))} \\ & \Longrightarrow & a < c \,. & \end{array}$$

(ii),(iii) Übung.

(iv) Es gilt

$$
\begin{aligned}
a < b \text{ und } c > 0 \quad &\Longrightarrow \quad b - a \in \mathbb{R}_+ \text{ und } c \in \mathbb{R}_+ \\
&\Longrightarrow \quad (b-a)c \in \mathbb{R}_+ && \text{(nach (A12))} \\
&\Longrightarrow \quad bc - ac \in \mathbb{R}_+ && \text{(nach (A9))} \\
&\Longrightarrow \quad ac < bc
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
a < b \text{ und } c < 0 \quad &\Longrightarrow \quad b - a \in \mathbb{R}_+ \text{ und } -c \in \mathbb{R}_+ \\
&\Longrightarrow \quad (b-a)(-c) \in \mathbb{R}_+ && \text{(nach (A12))} \\
&\Longrightarrow \quad -((b-a)c) \in \mathbb{R}_+ && \text{(nach Satz 2.1.5(iv))} \\
&\Longrightarrow \quad -(bc - ac) \in \mathbb{R}_+ && \text{(nach (A9))} \\
&\Longrightarrow \quad ac - bc \in \mathbb{R}_+ && \text{(nach (A1) und Satz 2.1.5(i),(ii))} \\
&\Longrightarrow \quad bc < ac\,.
\end{aligned}
$$

(v),(vi) Übung. □

Bevor wir zum letzten Axiom der reellen Zahlen kommen, führen wir weitere Bezeichnungen und Begriffe ein. Für $a, b \in \mathbb{R}$ schreiben wir $a \leq b$ oder auch $b \geq a$, wenn $a < b$ oder $a = b$. Aufgrund von (A10) gilt

$$a = b \iff a \leq b \text{ und } b \leq a\,.$$

Ist $0 \leq a$ (bzw. $a \leq 0$), so wird a **nichtnegativ** (bzw. **nichtpositiv**) genannt.

Definition 2.1.9 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und gelte $a < b$. Dann heißt die Menge*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

abgeschlossenes Intervall *und die Menge*

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

offenes Intervall. *Die Mengen*

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad \textit{und} \quad]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

werden **halboffene Intervalle** *genannt. Außerdem setzen wir*

$$
\begin{aligned}
[a, +\infty[\quad &:= \quad \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}\,, \\
]a, +\infty[\quad &:= \quad \{x \in \mathbb{R} : x > a\}\,, \\
]-\infty, b] \quad &:= \quad \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}\,, \\
]-\infty, b[\quad &:= \quad \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \quad \textit{und} \\
]-\infty, +\infty[\quad &:= \quad \mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$

Definition 2.1.10 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.*

(i) *$a \in \mathbb{R}$ heißt* **obere Schranke** *(bzw.* **untere Schranke***) von $M :\iff \forall\, x \in M : x \leq a$ (bzw. $\forall\, x \in M : x \geq a$).*

(ii) *M heißt* **nach oben** *(bzw.* **nach unten***)* **beschränkt** $:\iff$ *es existiert eine obere (bzw. untere) Schranke von M. M heißt* **beschränkt** $:\iff$ *M ist nach oben und unten beschränkt.*

Beispiel 2.1.11 (i) Jedes $a \in \mathbb{R}$ ist sowohl eine obere als auch eine untere Schranke von $\emptyset$. Insbesondere ist $\emptyset$ beschränkt.

(ii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann sind die Intervalle $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ und $]a, b]$ beschränkt, denn b ist eine obere und a eine untere Schranke von jedem dieser Intervalle.

(iii) Die Intervalle $]-\infty, b]$ und $]-\infty, b[$, $b \in \mathbb{R}$, sind von oben beschränkt, denn b ist eine obere Schranke von diesen Intervallen. Die Intervalle $[a, +\infty[$ und $]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, sind von unten beschränkt, denn a ist eine untere Schranke dieser Intervalle.

$\square$

Definition 2.1.12 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.*

(i) $a \in \mathbb{R}$ *wird* **Supremum** *von M genannt (in Zeichen: $a = \sup M$)* $:\Longleftrightarrow$

(Sup1) $\forall\, x \in M : x \leq a$,

(Sup2) $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x \in M : x > a - \varepsilon$.

(ii) $a \in \mathbb{R}$ *wird* **Infimum** *von M genannt (in Zeichen: $a = \inf M$)* $:\Longleftrightarrow$

(Inf1) $\forall\, x \in M : x \geq a$,

(Inf2) $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x \in M : x < a + \varepsilon$.

(iii) $a \in \mathbb{R}$ *heißt* **Maximum** *von M (in Zeichen: $a = \max M$)* $:\Longleftrightarrow$

(Max1) $\forall\, x \in M : x \leq a$,

(Max2) $a \in M$.

(iv) $a \in \mathbb{R}$ *heißt* **Minimum** *von M (in Zeichen: $a = \min M$)* $:\Longleftrightarrow$

(Min1) $\forall\, x \in M : x \geq a$,

(Min2) $a \in M$.

Der nächste Satz erklärt, warum das Supremum auch **kleinste obere Schranke** und das Infimum auch **größte untere Schranke** genannt wird.

Satz 2.1.13 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $a = \sup M$ (bzw. $a = \inf M$) genau dann, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind.*

(1) *a ist eine obere (bzw. untere) Schranke.*

(2) *Ist a' eine obere (bzw. untere) Schranke von M, so ist $a \leq a'$ (bzw. $a' \leq a$).*

Beweis. Wir beweisen die Aussage für das Supremum. Für das Infimum verfährt man analog.

($\Longrightarrow$) Gelte $a = \sup M$. Nach (Sup1) ist dann a eine obere Schranke von M. Sei auch a' ein obere Schranke von M. Zu zeigen ist $a \leq a'$. Wir beweisen dies indirekt. Wir nehmen also $a > a'$, d.h. $a - a' > 0$ an. Nach (Sup2) existiert dann ein $x \in M$ mit $x > a - (a - a')$, d.h. $x > a'$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass a' eine obere Schranke von M ist. Somit ist $a \leq a'$ gezeigt.

($\Longleftarrow$) Wir setzen jetzt voraus, dass (1) und (2) von a erfüllt werden. Trivialerweise gilt dann (Sup1). Zu beweisen bleibt (Sup2). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass ein $x \in M$ mit $x > a - \varepsilon$ existiert. Den Beweis davon führen wir wieder indirekt. Angenommen, solch ein x existiert nicht. Dann ist $x \leq a - \varepsilon$ für alle $x \in M$. Das heißt, $a - \varepsilon$ ist eine obere Schranke von M. Da aber $a - \varepsilon < a$, erhalten wir einen Widerspruch zu (2). $\square$

Satz 2.1.14 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$. Dann gilt:*

(i) *Existiert ein Supremum (bzw. Infimum) von M, so ist es eindeutig bestimmt.*

(ii) *Ist* $a = \max M$ *(bzw.* $a = \min M$*), so ist auch* $a = \sup M$ *(bzw.* $a = \inf M$*).*

Beweis. (i) Sei sowohl a_1 als auch a_2 ein Supremum von M. Da dann a_1 und a_2 auch obere Schranken von M sind, gilt nach Satz 2.1.13

$$a_1 \leq a_2 \quad \text{und} \quad a_2 \leq a_1 \ .$$

Folglich ist $a_1 = a_2$. Analog zeigt man die Eindeutigkeit des Infimums.

(ii) Sei $a = \max M$. Dann gilt offensichtlich (Sup1). Wegen (Max2) und $a > a - \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt auch (Sup2). Somit ist tatsächlich $a = \sup M$. Analog zeigt man, dass ein Minimum auch das Infimum ist. □

Aus dem letzten Satz folgt, dass auch $\max M$ und $\min M$, falls sie existieren, eindeutig bestimmt sind.

Beispiel 2.1.15 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(i) Offensichtlich ist $b = \max\,[a, b]$ und $a = \min\,[a, b]$. Mit Satz 2.1.14(ii) folgt $b = \sup\,[a, b]$ und $a = \inf\,[a, b]$.

(ii) Es ist $b = \sup\,]a, b[$. Dies kann man folgendermaßen verifizieren. Zunächst ist b offensichtlich eine obere Schranke von $]a, b[$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen ein $x \in M$ mit $x > b - \varepsilon$ finden. Dazu führen wir eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: $b - \varepsilon < a$. Dann ist

$$b - \varepsilon < a = \frac{a + a}{2} < \frac{a + b}{2} < \frac{b + b}{2} = b \ .$$

Also ist

$$\frac{a + b}{2} \in \,]a, b[\quad \text{und} \quad \frac{a + b}{2} > b - \varepsilon \ .$$

2. Fall: $b - \varepsilon \geq a$. In diesem Fall gilt

$$a \leq b - \varepsilon = b - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < b - \frac{\varepsilon}{2} < b \ .$$

Somit haben wir

$$b - \frac{\varepsilon}{2} \in \,]a, b[\quad \text{und} \quad b - \frac{\varepsilon}{2} > b - \varepsilon \ .$$

Damit ist $b = \sup\,]a, b[$ bewiesen.

Das Maximum von $]a, b[$ existiert nicht. Andernfalls wäre nach Satz 2.1.14(ii)

$$\max\,]a, b[= \sup\,]a, b[= b \ .$$

Aber $b \notin \,]a, b[$.

Genauso sieht man, dass $a = \inf\,]a, b[$ und dass $\min\,]a, b[$ nicht existiert.

□

Vollständigkeitsaxiom. Das Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen lautet:

(A13) Jede nichtleere, von oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum.

Bemerkung 2.1.16 Die Axiome (A1)-(A13) besagen, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein **vollständiger angeordneter Körper** ist. □

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und sei
$$-M := \{-x : x \in M\} .$$
Dann gilt:

- a ist genau dann eine obere Schranke von M, wenn $-a$ eine untere Schranke von $-M$ ist.
- $a = \sup M \iff -a = \inf(-M)$.

Folglich ist das Vollständigkeitsaxiom äquivalent zu:

> Jede nichtleere, von unten beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Infimum.

2.2 Betrag und Signum

Definition 2.2.1 *Sei $a \in \mathbb{R}$. Der* **Absolutbetrag** *oder einfach* **Betrag** *von a ist*
$$|a| := \begin{cases} a & \textit{für} \quad a \geq 0 \\ -a & \textit{für} \quad a < 0 \end{cases} .$$
Das **Vorzeichen** *oder* **Signum** *von a ist*
$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad a > 0 \\ 0 & \textit{für} \quad a = 0 \\ -1 & \textit{für} \quad a < 0 \end{cases} .$$

Satz 2.2.2 *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $|a| \geq 0$,

(ii) $|a| = 0 \iff a = 0$,

(iii) $|a + b| \leq |a| + |b|$,

(iv) $||a| - |b|| \leq |a + b|$,

(v) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,

(vi) $a = |a| \cdot \operatorname{sgn} a$,

(vii) $|a| = a \cdot \operatorname{sgn} a$.

Beweis. Wir beweisen hier nur (iii) und (iv).
(iii) Ist $a \geq 0$, so ist
$$a = |a| \quad \text{und} \quad -a \leq 0 \leq |a| .$$
Ist hingegen $a < 0$, so ist
$$-a = |a| \quad \text{und} \quad a \leq 0 \leq |a| .$$
Also gilt stets
$$a \leq |a| \quad \text{und} \quad -a \leq |a| . \tag{2.2.1}$$
Genauso gilt
$$b \leq |b| \quad \text{und} \quad -b \leq |b| . \tag{2.2.2}$$
Durch Addition der Ungleichungen (2.2.1) und (2.2.2) erhalten wir
$$a + b \leq |a| + |b| \quad \text{und} \quad -(a + b) \leq |a| + |b| .$$

Da

$$|a+b| = a+b \quad \text{oder} \quad |a+b| = -(a+b)\ ,$$

folgt

$$|a+b| \leq |a| + |b|\ .$$

(iv) Nach (iii) gilt

$$|a| = |(a+b)+(-b)| \leq |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$$

und somit

$$|a| - |b| \leq |a+b|\ .$$

Analog sieht man

$$|b| - |a| \leq |a+b|\ .$$

Da

$$||a|-|b|| = |a|-|b| \quad \text{oder} \quad ||a|-|b|| = |b|-|a|\ ,$$

folgt

$$||a|-|b|| \leq |a+b|\ .$$

□

Bemerkung 2.2.3 Die Eigenschaften (i) und (ii) aus Satz 2.2.2 besagen, dass der Betrag **positiv definit** ist. Die Ungleichung (iii) wird **Dreiecksungleichung** genannt. □

Der nächste Satz wird u.a. zum Lösen von Betragsungleichungen benutzt.

Satz 2.2.4 *Für alle $a, c \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $|a| \leq c \iff a \leq c$ *und* $-a \leq c$*,*

(ii) $|a| < c \iff a < c$ *und* $-a < c$*,*

(iii) $|a| \geq c \iff a \geq c$ *oder* $-a \geq c$*,*

(iv) $|a| > c \iff a > c$ *oder* $-a > c$*.*

Beweis. (i) Wegen (2.2.1) haben wir

$$|a| \leq c \quad \Longrightarrow \quad a \leq c \ \text{ und } \ -a \leq c\ .$$

Da $|a| = a$ oder $|a| = -a$, gilt auch

$$a \leq c \ \text{ und } \ -a \leq c \quad \Longrightarrow \quad |a| \leq c\ .$$

(ii) Man verfahre wie bei (i).

(iii),(iv) Diese Aussagen erhält man durch Kontraposition von (i) und (ii). □

2.3 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Wir charakterisieren die Menge der natürlichen Zahlen folgendermaßen als eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Definition 2.3.1 *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt* **induktiv** $:\Longleftrightarrow$

(1) $1 \in M$,

(2) $x \in M \Longrightarrow x + 1 \in M$.

Beispiel 2.3.2 Jedes Intervall $[a, +\infty[$ mit $a \leq 1$ ist induktiv. □

Wir setzen

$$\mathcal{P}_{\text{ind}}(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : M \text{ ist induktiv}\}$$

und definieren:

Definition 2.3.3 *Die Menge*

$$\mathbb{N} := \bigcap_{M \in \mathcal{P}_{\text{ind}}(\mathbb{R})} M$$

heißt **Menge der natürlichen Zahlen**.

Offensichtlich ist $\mathbb{N}$ induktiv. Außerdem haben wir

Satz 2.3.4 (Induktionsprinzip) *Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ und ist M induktiv, so ist $M = \mathbb{N}$.*

Beweis. Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ induktiv, so ist $\mathbb{N} \subseteq M$. Gilt außerdem $M \subseteq \mathbb{N}$, so folgt (vgl. Bemerkung 1.2.4) $M = \mathbb{N}$. □

Die wichtigste Anwendung des Induktionsprinzips ist

Folgerung 2.3.5 (Beweisprinzip der vollständigen Induktion) *Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$ gegeben und gelte*

(1) *$A(1)$ ist richtig,* *(Induktionsanfang)*

(2) $\forall\, n \in \mathbb{N} : (A(n) \Longrightarrow A(n+1))$. *(Induktionsschritt)*

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Beweis. Wegen (1) und (2) ist

$$M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist richtig}\}$$

eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$. Nach dem Induktionsprinzip folgt $M = \mathbb{N}$. □

Satz 2.3.6 (i) *Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist $m + n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist $mn \in \mathbb{N}$.*

Beweis. (i) Wir fixieren $m \in \mathbb{N}$ und beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion über n.

Induktionsanfang: Da $\mathbb{N}$ induktiv ist und da $m \in \mathbb{N}$, ist $m+1 \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und gelte $m+n \in \mathbb{N}$. Da $\mathbb{N}$ induktiv ist, folgt

$$m + (n+1) = (m+n) + 1 \in \mathbb{N} \, .$$

Damit ist (i) bewiesen.

(ii) Übung. □

Auch das so genannte **Prinzip der rekursiven Definition** beruht auf dem Induktionsprinzip. Dieses wird z.B. in folgender Definition benutzt.

Definition 2.3.7 *Seien $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Die Summe $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$ ist durch*

$$\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1 \quad \textit{und} \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k := a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

definiert, das Produkt $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdots a_n$ durch

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1 \quad \textit{und} \quad \prod_{k=1}^{n+1} a_k := a_{n+1} \prod_{k=1}^{n} a_k \, .$$

Außerdem setzen wir

$$\sum_{k=1}^{0} a_k := 0 \quad \textit{und} \quad \prod_{k=1}^{0} a_k := 1 \, .$$

Bemerkung 2.3.8 Folgerung 2.3.5 und Definition 2.3.7 können so modifiziert werden, dass man nicht mit 1, sondern einer anderen natürlichen (oder sogar ganzen) Zahl n_0 beginnt. Zum Beispiel ist

$$\sum_{k=3}^{5} k = 3 + 4 + 5 \, .$$

□

Wir wenden uns jetzt noch den ganzen und rationalen Zahlen zu.

Definition 2.3.9 (i) *$a \in \mathbb{R}$ heißt* **ganz** $:\Longleftrightarrow$

$$\exists \, m, n \in \mathbb{N} : a = m - n \, .$$

(ii) *$a \in \mathbb{R}$ heißt* **rational** $:\Longleftrightarrow$

$$\exists \, m \in \mathbb{Z} \, \exists \, n \in \mathbb{N} : a = \frac{m}{n} \, .$$

Andernfalls wird a **irrational** *genannt.*

Wie bereits vereinbart, ist

$$\mathbb{Z} := \{a \in \mathbb{R} : a \text{ ist ganz}\} \quad \text{und} \quad \mathbb{Q} := \{a \in \mathbb{R} : a \text{ ist rational}\} \, .$$

Satz 2.3.10 (i) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *ist ein* **kommutativer Ring mit Eins**, *d.h. für* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *gelten die Axiome (A1)-(A9) mit Ausnahme von (A8).*

(ii) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *ist ein angeordneter Körper, d.h. für* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *gelten die Axiome (A1)-(A12).*

Beweis. Dies rechnet man direkt nach. □

Satz 2.3.11 *Jede nichtleere, von oben (bzw. von unten) beschränkte Menge ganzer Zahlen besitzt ein Maximum (bzw. Minimum).*

Beweis. Vgl. Walter: Analysis 1, Abschnitt 2.5. □

2.4 Archimedisches Axiom und Intervallschachtelung

Satz 2.4.1 (Archimedisches Axiom) *Die Menge der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt, d.h.*

$$\forall\, a \in \mathbb{R}\, \exists\, n \in \mathbb{N} : a < n \,.$$

Beweis. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert dann $c := \sup \mathbb{N}$. Nach Definition des Supremums gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$c - 1 < m \,.$$

Für solch ein m haben wir dann

$$c < m + 1 \,.$$

Da aber auch $m + 1 \in \mathbb{N}$, erhalten wir einen Widerspruch dazu, dass c eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist. □

Folgerung 2.4.2 *Zu jedem* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *existiert ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Beweis. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach Satz 2.4.1 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\varepsilon} < n$, d.h. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. □

Folgerung 2.4.3 *Für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *existiert ein* $q \in \mathbb{Q}$ *mit* $a < q < b$.

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und gelte $a < b$. Nach Folgerung 2.4.2 können wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{n_0} < b - a \tag{2.4.1}$$

wählen. Wir betrachten $M := \{m \in \mathbb{Z} : m > n_0 a\}$. Nach Satz 2.4.1 ist $M \neq \emptyset$. Außerdem ist M von unten beschränkt. Also existiert $m_0 := \min M$ (vgl. Satz 2.3.11). Dann gilt $m_0 \in M$ und $m_0 - 1 \notin M$, d.h.

$$\frac{m_0}{n_0} > a \quad \text{und} \quad \frac{m_0 - 1}{n_0} \leq a \,. \tag{2.4.2}$$

Aus (2.4.1) und (2.4.2) folgt

$$a < \frac{m_0}{n_0} = \frac{m_0 - 1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < a + b - a = b \,,$$

d.h. $q := \frac{m_0}{n_0} \in \mathbb{Q}$ leistet das Gewünschte. □

Definition 2.4.4 *Ein System* $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ *von abgeschlossenen Intervallen* $[a_n, b_n]$ *heißt* **Intervallschachtelung** $:\Longleftrightarrow$

(1) $\forall\, m, n \in \mathbb{N} : (n \geq m \Longrightarrow [a_n, b_n] \subseteq [a_m, b_m])$,

(2) $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \,\exists\, n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon$.

Zum Beispiel ist $\left\{\left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Intervallschachtelung.

Satz 2.4.5 (Prinzip der Intervallschachtelung) *Sei* $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Intervallschachtelung. Dann existiert ein* $x \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\} .$$

Beweis. Nach der Eigenschaft (1) einer Intervallschachtelung gilt für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$

$$a_m \leq a_n < b_n \leq b_m .$$

Es folgt

$$a_m \leq b_n \quad \text{für alle} \quad m, n \in \mathbb{N} .$$

Insbesondere ist $M := \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert somit $x := \sup M$. Da x eine obere Schranke von M ist, gilt

$$a_n \leq x \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} .$$

Da auch jedes b_n eine obere Schranke von M ist, gilt außerdem (vgl. Satz 2.1.13)

$$x \leq b_n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} .$$

Also ist

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \ . \tag{2.4.3}$$

Zu zeigen bleibt, dass x durch (2.4.3) eindeutig bestimmt ist. Seien also

$$x_1, x_2 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \ . \tag{2.4.4}$$

Angenommen, es ist $x_1 < x_2$, d.h. $x_2 - x_1 > 0$. Dann existiert nach der Eigenschaft (2) einer Intervallschachtelung ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$b_k - a_k < x_2 - x_1 .$$

Nach (2.4.4) gilt aber

$$a_k \leq x_1 \quad \text{und} \quad x_2 \leq b_k ,$$

woraus

$$b_k - a_k \geq x_2 - x_1$$

folgt. Demnach kann $x_1 < x_2$ nicht gelten. Analog führt man $x_1 > x_2$ zum Widerspruch. Also ist $x_1 = x_2$. □

Bemerkung 2.4.6 Das Vollständigkeitsaxiom (A13) ist äquivalent zu:

> Es gelten das Prinzip der Intervallschachtelung (Satz 2.4.5) und das Archimedische Axiom (Satz 2.4.1).

□

2.5 Endliche, abzählbare und überabzählbare Mengen

Ist $n \in \mathbb{N}$, so sei

$$\mathbb{N}_n := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\} = \{1, \ldots, n\} \ .$$

Definition 2.5.1 *Zwei nichtleere Mengen M und N heißen* **gleichmächtig** *(in Zeichen: $M \sim N$) $:\Longleftrightarrow$ Es existiert eine bijektive Abbildung $f : M \to N$.*

Definition 2.5.2 *Sei M eine Menge.*

(i) *M heißt* **endlich** $:\Longleftrightarrow$ *$M = \emptyset$ oder $\exists\, n \in \mathbb{N} : M \sim \mathbb{N}_n$.*

(ii) *M heißt* **unendlich** $:\Longleftrightarrow$ *M ist nicht endlich.*

(iii) *M heißt* **abzählbar** $:\Longleftrightarrow$ *$M \sim \mathbb{N}$.*

(iv) *M heißt* **höchstens abzählbar** $:\Longleftrightarrow$ *M ist endlich oder abzählbar.*

(v) *M heißt* **überabzählbar** $:\Longleftrightarrow$ *M ist weder endlich noch abzählbar.*

Ist M endlich, so können wir M in der Form

$$M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

schreiben. Ist M abzählbar, so hat M die Gestalt

$$M = \{x_1, x_2, \ldots\} \quad \text{mit} \quad x_i \neq x_j \quad \text{für} \quad i \neq j \ .$$

Definition 2.5.3 *Die* **Kardinalzahl** *einer endlichen Menge M ist*

$$\operatorname{card} M := \begin{cases} 0 & \text{, falls} \quad M = \emptyset \\ n & \text{, falls} \quad M \sim \mathbb{N}_n \end{cases} \ .$$

Ist die Menge M unendlich, so schreiben wir $\operatorname{card} M = \infty$. Mit $\operatorname{card} M < \infty$ drücken wir aus, dass M endlich ist.

Satz 2.5.4 *$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.*

Beweis. Die Abbildung

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \ , \quad f_1(k) := \begin{cases} 2k & \text{für} \quad k > 0 \\ -2k+1 & \text{für} \quad k \leq 0 \end{cases} \ ,$$

ist bijektiv. Also gilt $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, d.h. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar.

Zum Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ benutzen wir das **1. Cantorsche Diagonalverfahren**. Wir ordnen die Elemente von $\mathbb{Q}_+ := \{a \in \mathbb{Q} : a > 0\}$ in folgendem Schema an.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & \to & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & \to & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Dann schreiben wir diese Zahlen in der angegebenen Reihenfolge auf, wobei wir mehrfach auftretende Zahlen bei Wiederholung weglassen, also

$$1\,,\ 2\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ 3\,,\ 4\,,\ \frac{3}{2}\,,\ \frac{2}{3}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ 5\,,\ \ldots\ .$$

Hieraus erhalten wir eine bijektive Abbildung $f_2 : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}$, indem wir

$$f_2(1) := 1\,,\ f_2(2) := 2\,,\ f_2\left(\frac{1}{2}\right) := 3\,,\ f_2\left(\frac{1}{3}\right) := 4\,,\ f_2(3) := 5\,,\ \ldots$$

setzen. Schließlich definieren wir $f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ durch

$$f_3(a) := \begin{cases} 2f_2(a) & \text{für} \quad a > 0 \\ 1 & \text{für} \quad a = 0 \\ 2f_2(-a) + 1 & \text{für} \quad a < 0 \end{cases} .$$

Da f_3 offensichtlich bijektiv ist, folgt $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. □

Später werden wir beweisen:

Satz 2.5.5 $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Diese Aussage werden wir auf folgenden Satz zurückführen.

Satz 2.5.6 *Die Menge* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *aller Abbildungen* $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ *ist überabzählbar.*

Beweis. Wir benutzen das **2. Cantorsche Diagonalverfahren**. Angenommen, die Behauptung gilt nicht. Dann ist

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f_1, f_2, f_3, \ldots\}\ . \tag{2.5.1}$$

Wir definieren $f_0 \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ durch

$$f_0(n) := \begin{cases} 1 & \text{, falls} \quad f_n(n) = 0 \\ 0 & \text{, falls} \quad f_n(n) = 1 \end{cases} .$$

Dann gilt

$$f_0(n) \neq f_n(n) \quad \text{und somit} \quad f_0 \neq f_n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\ .$$

Folglich ist

$$f_0 \notin \{f_1, f_2, f_3, \ldots\}\ ,$$

was aber im Widerspruch zu (2.5.1) steht. □

Bemerkung 2.5.7 Die 1878 von Cantor aufgestellte **Kontinuumshypothese** besagt, dass für jede Menge M mit $\mathbb{N} \subseteq M \subseteq \mathbb{R}$ entweder $M \sim \mathbb{N}$ oder $M \sim \mathbb{R}$ gilt. Diese Vermutung ist auf der Basis des heute zugrunde gelegten Axiomensystems der Mengenlehre weder beweisbar (Paul J. Cohen 1963) noch widerlegbar (Kurt Gödel 1938). □

2.6 Potenzen und Wurzeln reeller Zahlen

Definition 2.6.1 *Sei* $n \in \mathbb{N}_0$. *Dann ist*

$$n! := \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k & \textit{für} \quad n \in \mathbb{N} \\ 1 & \textit{für} \quad n = 0 \end{cases} .$$

Diese Zahl wird "n **Fakultät***" genannt.*

Offensichtlich gilt

$$(n+1)! = n!\,(n+1) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0 \; .$$

Definition 2.6.2 *Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist*

$$\binom{a}{n} := \begin{cases} \dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (a-k+1) & \textit{für} \quad n \in \mathbb{N} \\[2ex] \qquad 1 & \textit{für} \quad n = 0 \end{cases} \; .$$

Die Zahlen $\binom{a}{n}$, gesprochen "a über n", heißen **Binomialkoeffizienten**.

Beispiel 2.6.3 Es ist

$$\begin{aligned} \binom{3/2}{3} &= \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - 2\right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{16} \; . \end{aligned}$$

□

Satz 2.6.4 *Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ und alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) *Ist $n > m$, so ist $\binom{m}{n} = 0$.*

(ii) *Ist $n \le m$, so ist*

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \binom{m}{m-n} \; .$$

(iii) *Es ist*

$$\binom{a}{n} + \binom{a}{n+1} = \binom{a+1}{n+1} \; .$$

Beweis. (i),(ii) Übung.

(iii) Die Behauptung ist für $n = 0$ richtig, denn

$$\binom{a}{0} = 1 \; , \quad \binom{a}{1} = a \quad \text{und} \quad \binom{a+1}{1} = a + 1 \; .$$

Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\binom{a}{n} + \binom{a}{n+1} &= \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a-k+1) + \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n+1}(a-k+1) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\,(n+1)\prod_{k=1}^{n}(a-k+1) + \frac{1}{(n+1)!}\,(a-n)\prod_{k=1}^{n}(a-k+1) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\,(a+1)\prod_{k=1}^{n}(a-k+1) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(a-k+1) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\prod_{l=1}^{n+1}(a+1-l+1) \qquad \text{(nach Ersetzung } l := k+1\text{)} \\
&= \binom{a+1}{n+1}\,.
\end{aligned}$$

□

Die **Potenz** a^n einer reellen Zahl a mit Exponenten $n \in \mathbb{Z}$ ist bekanntlich wie folgt definiert.

Definition 2.6.5 *Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ist*

$$a^0 := 1 \quad \textit{und} \quad a^{n+1} := a^n \cdot a \quad \textit{für} \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Ist $a \neq 0$ und ist $n \in \mathbb{Z}$ und $n < 0$, so ist

$$a^n := \frac{1}{a^{-n}}\,.$$

Wie man einfach überprüft, gilt:

Satz 2.6.6 *Für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:*

(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,

(ii) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$,

(iii) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,

(iv) $0 < a < b$ *und* $n > 0 \Longrightarrow a^n < b^n$. □

Satz 2.6.7 (Binomischer Lehrsatz) *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\,.$$

Beweis. Der Beweis wird mit vollständiger Induktion über n unter Benutzung von Satz 2.6.4(iii) geführt. □

Die folgende Ungleichung ist nach Jakob I. Bernoulli (1654-1705) benannt.

Satz 2.6.8 (Bernoullische Ungleichung) *Für jedes $a \in [-1, +\infty[$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1+a)^n \geq 1 + na \,. \tag{2.6.1}$$

Beweis. Sei $a \in [-1, +\infty[$. Wir zeigen mittels vollständiger Induktion, dass (2.6.1) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsanfang: Offensichtlich gilt (2.6.1) für $n = 1$.

Induktionsschritt: Gelte (2.6.1) für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a \,,$$

denn

$$\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) \\
&\geq (1+na)(1+a) && \text{(wegen (2.6.1) und } a \geq -1\text{)} \\
&= 1 + (n+1)a + na^2 \\
&\geq 1 + (n+1)a \,. && \text{(da } na^2 \geq 0\text{)}
\end{aligned}$$

□

Folgerung 2.6.9 (i) *Zu jedem $a \in]1, +\infty[$ und zu jedem $c \in \mathbb{R}_+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > c$.*

(ii) *Zu jedem $b \in]0, 1[$ und zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n < \varepsilon$.*

Beweis. (i) Sei $a \in]1, +\infty[$ und $c \in \mathbb{R}_+$. Nach dem Archimedischen Axiom existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{c}{a-1} < n \,.$$

Da $a - 1 > 0$, existiert also ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$c < n(a-1) \,.$$

Für solch ein n folgt mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung

$$a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1) > n(a-1) > c \,.$$

(ii) Dies folgt aus (i), indem man $a := b^{-1}$ und $c := \varepsilon^{-1}$ setzt. □

Satz 2.6.10 *Für alle $a \in [0, 1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1+a)^n \leq 1 + (2^n - 1)\, a \,.$$

Beweis. Übung. □

Definition 2.6.11 *Sei $a \in \mathbb{R}_+$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Die n-**te Wurzel** aus a, bezeichnet mit $\sqrt[n]{a}$, ist die Zahl $\xi \in \mathbb{R}_+$, für die $\xi^n = a$ gilt.*

Diese Definition wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

Satz 2.6.12 *Sei $a \in \mathbb{R}_+$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau ein $\xi \in \mathbb{R}_+$ mit $\xi^n = a$.*

Beweis. Zunächst zeigen wir die Existenz einer solchen Zahl ξ. Dazu betrachten wir die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}_+ : x^n \leq a\} \ .$$

Es ist $M \neq \emptyset$. Ist nämlich $a < 1$, so ist $a^n \leq a$ und somit $a \in M$. Ist dagegen $1 \leq a$, so ist $1 \in M$. Außerdem ist $c := \max\{1, a\}$ eine obere Schranke von M. Für $x \in M \cap]1, +\infty[$ gilt nämlich

$$x \leq x^n \leq a \leq c$$

und für $x \in M \cap]0, 1]$ ist

$$x \leq 1 \leq c \ .$$

Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert folglich $\xi := \sup M$. Da $a \in M$ oder $1 \in M$, ist $\xi > 0$.

Wir zeigen, dass

$$\xi^n = a \ . \tag{2.6.2}$$

Dazu nehmen wir zuerst $\xi^n < a$ an. Wir setzen

$$\varepsilon_1 := \min\left\{\xi, \frac{a - \xi^n}{(2^n - 1)\,\xi^{n-1}}\right\} \ .$$

Dann gilt

$$0 < \frac{\varepsilon_1}{\xi} \leq 1 \quad \text{und} \quad (2^n - 1)\,\xi^{n-1}\varepsilon_1 \leq a - \xi^n \ .$$

Also können wir mit Satz 2.6.10

$$(\xi + \varepsilon_1)^n = \xi^n \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\xi}\right)^n \leq \xi^n \left(1 + (2^n - 1)\,\frac{\varepsilon_1}{\xi}\right) = \xi^n + (2^n - 1)\,\xi^{n-1}\varepsilon_1 \leq a \ ,$$

d.h.

$$\xi + \varepsilon_1 \in M$$

schließen. Da $\varepsilon_1 > 0$, ist dies ein Widerspruch dazu, dass ξ eine obere Schranke von M ist.

Jetzt nehmen wir $\xi^n > a$ an. Wir setzen

$$\varepsilon_2 := \min\left\{\xi, \frac{\xi^n - a}{n\xi^{n-1}}\right\} \ .$$

Dann ist

$$-\frac{\varepsilon_2}{\xi} \geq -1 \quad \text{und} \quad n\varepsilon_2\xi^{n-1} \leq \xi^n - a \ .$$

Mit der Bernoullischen Ungleichung folgt

$$(\xi - \varepsilon_2)^n = \xi^n \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\xi}\right)^n \geq \xi^n \left(1 - \frac{n\varepsilon_2}{\xi}\right) = \xi^n - n\varepsilon_2\xi^{n-1} \geq a \ ,$$

also

$$(\xi - \varepsilon_2)^n \geq a \ . \tag{2.6.3}$$

Andererseits existiert nach (Sup2) ein $x \in M$ mit $x > \xi - \varepsilon_2$. Für solch ein x gilt dann

$$(\xi - \varepsilon_2)^n < x^n \quad \text{und} \quad x^n \leq a \ .$$

Dies impliziert

$$(\xi - \varepsilon_2)^n < a \ . \tag{2.6.4}$$

Da sich (2.6.3) und (2.6.4) widersprechen, kann auch $\xi^n > a$ nicht gelten. Damit ist (2.6.2) gezeigt.

Nun ist noch die Eindeutigkeit zu verifizieren. Seien also $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}_+$ mit $\xi_1^n = a$ und $\xi_2^n = a$. Wäre $\xi_1 < \xi_2$, so würde $\xi_1^n < \xi_2^n$, d.h. die falsche Aussage $a < a$ folgen. Genauso sieht man, dass $\xi_1 > \xi_2$ nicht richtig sein kann. Somit muss $\xi_1 = \xi_2$ gelten. □

In Ergänzung zu Definition 2.6.11 setzen wir noch

$$\sqrt[n]{0} := 0 \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N} .$$

Außerdem vereinbaren wir

$$\sqrt{a} := \sqrt[2]{a} \quad \text{für} \quad a \in [0, +\infty[.$$

Satz 2.6.13 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \iff \sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} .$$

Beweis. ($\Longrightarrow$) Sei $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$. Dann haben wir

$$\sqrt[n]{m} = \frac{k}{l} \quad \text{mit} \quad k, l \in \mathbb{N} .$$

Dabei können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit (im weiteren o.B.d.A. abgekürzt) annehmen, dass k und l teilerfremd sind. Nach Definition der Wurzel und Satz 2.6.6 folgt

$$m = \left(\frac{k}{l}\right)^n = \frac{k^n}{l^n}$$

und somit

$$ml^n = k^n . \tag{2.6.5}$$

Zu zeigen ist, dass $l = 1$. Angenommen, es ist $l > 1$. Dann existiert eine Primzahl $p > 1$, die l teilt. Eine solche Zahl p teilt auch ml^n. Wegen (2.6.5) muss dann p auch k teilen. Damit erhalten wir einen Widerspruch dazu, dass k und l teilerfremd sind. Also gilt tatsächlich $l = 1$.

($\Longleftarrow$) Das ist trivial. □

Bemerkung 2.6.14 Aus Satz 2.6.13 folgt insbesondere, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Zum Beispiel sind $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ sowie $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{3}$ irrational. □

Als nächstes erinnern wir an die Definition der Potenzen mit rationalem Exponenten.

Definition 2.6.15 *Sei $a \in \mathbb{R}_+$ und sei $q \in \mathbb{Q}$. Ist $q = \dfrac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$, so ist*

$$a^q := \sqrt[n]{a^m} .$$

Wie man einfach sieht, ist diese Definition korrekt, d.h. für $a \in \mathbb{R}_+$, $m, k \in \mathbb{Z}$ und $n, l \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{m}{n} = \frac{k}{l} \implies \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[l]{a^k} .$$

Auch der folgende Satz ist leicht nachzuprüfen.

Satz 2.6.16 *Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ und alle $p, q \in \mathbb{Q}$ gilt:*

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$,

(ii) $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$,

(iii) $(a \cdot b)^q = a^q \cdot b^q$,

(iv) $a < b$ *und* $q > 0$ *(bzw.* $q < 0$*)* $\Longrightarrow a^q < b^q$ *(bzw.* $a^q > b^q$*)*,

(v) $p < q$ *und* $a > 1$ *(bzw.* $a < 1$*)* $\Longrightarrow a^p < a^q$ *(bzw.* $a^p > a^q$*)*. □

Im Rest dieses Abschnitts soll es noch um das arithmetische und das geometrische Mittel reeller Zahlen gehen.

Definition 2.6.17 *Seien $a_1, \ldots, a_n \in [0, +\infty[$. Dann heißt*

$$\mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n) := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

arithmetisches Mittel *und*

$$\mathrm{G}(a_1, \ldots, a_n) := \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

geometrisches Mittel *von $a_1, \ldots, a_n$.*

Lemma 2.6.18 *Seien $a_1, \ldots, a_n \in [0, +\infty[$ und sei $n \geq 2$. Dann ist*

$$\mathrm{G}(a_1, \ldots, a_n)^n = a_n \, \mathrm{G}(a_1, \ldots, a_{n-1})^{n-1} .$$

Beweis. Die Behauptung ist offensichtlich. □

Satz 2.6.19 *Für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ ist*

$$\min\{a_1, \ldots, a_n\} \leq \mathrm{G}(a_1, \ldots, a_n) \leq \mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n) \leq \max\{a_1, \ldots, a_n\} , \tag{2.6.6}$$

wobei Gleichheit in einer dieser Ungleichungen nur dann auftritt, wenn $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Beweis. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ und sei

$$c_1 = \min\{a_1, \ldots, a_n\} \quad \text{und} \quad c_2 = \max\{a_1, \ldots, a_n\} .$$

Dann haben wir

$$c_1 = \sqrt[n]{c_1^n} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \mathrm{G}(a_1, \ldots, a_n) \tag{2.6.7}$$

und

$$c_2 = \frac{n c_2}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n) . \tag{2.6.8}$$

Die erste und die dritte Ungleichung von (2.6.6) sind somit gezeigt.

Den Beweis der zweiten Ungleichung von (2.6.6) führen wir mit vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ haben wir

$$\mathrm{G}(a_1) = a_1 = \mathrm{A}(a_1) .$$

Induktionsschritt: Sei jetzt $n \geq 2$ und gelte

$$\mathrm{G}(a_1, \ldots, a_{n-1}) \leq \mathrm{A}(a_1, \ldots, a_{n-1}) .$$

Wir müssen zeigen, dass dann auch

$$\mathrm{G}(a_1, \ldots, a_n) \leq \mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n) .$$

Dafür ist es ausreichend, die Ungleichung

$$(n-1)\,(\mathrm{A}(a_1, \ldots, a_{n-1}) - \mathrm{G}(a_1, \ldots, a_{n-1})) \leq n\,(\mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n) - \mathrm{G}(a_1, \ldots, a_n)) \tag{2.6.9}$$

zu verifizieren. Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$a_1 + \cdots + a_{n-1} - (n-1)\,\mathrm{G}(a_1, \ldots, a_{n-1}) \leq a_1 + \cdots + a_n - n\,\mathrm{G}(a_1, \ldots, a_n) ,$$

d.h. zu

$$\mathrm{G}(a_1,\dots,a_{n-1}) + n\left(\mathrm{G}(a_1,\dots,a_n) - \mathrm{G}(a_1,\dots,a_{n-1})\right) \le a_n \ ,$$

also zu

$$1 + n\left(\frac{\mathrm{G}(a_1,\dots,a_n)}{\mathrm{G}(a_1,\dots,a_{n-1})} - 1\right) \le \frac{a_n}{\mathrm{G}(a_1,\dots,a_{n-1})} \ .$$

Die letzte Ungleichung erhält man nun, indem man

$$b := \frac{\mathrm{G}(a_1,\dots,a_n)}{\mathrm{G}(a_1,\dots,a_{n-1})} - 1 \ge -1$$

setzt und mit der Bernoullischen Ungleichung und Lemma 2.6.18

$$\begin{aligned} 1 + n\left(\frac{\mathrm{G}(a_1,\dots,a_n)}{\mathrm{G}(a_1,\dots,a_{n-1})} - 1\right) &= 1 + nb \\ &\le (1+b)^n \\ &= \frac{\mathrm{G}(a_1,\dots,a_n)^n}{\mathrm{G}(a_1,\dots,a_{n-1})^n} \\ &= \frac{a_n}{\mathrm{G}(a_1,\dots,a_{n-1})} \end{aligned}$$

schließt.

Damit ist (2.6.6) bewiesen.

Sind nicht alle a_i gleich, so ist jede der Ungleichungen in (2.6.6) eine echte Ungleichung. Für die erste und dritte Ungleichung sieht man dies anhand der Abschätzungen (2.6.7) und (2.6.8). Für die zweite Ungleichung zeigt man das, indem man die Aussage für $n = 2$ direkt nachrechnet und für $n \ge 3$ die Ungleichung (2.6.9) benutzt. □

2.7 Komplexe Zahlen

Wir erklären in $\mathbb{R}^2$ folgendermaßen eine Addition und eine Multiplikation.

Definition 2.7.1 *Für $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ sei*

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

und

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \ .$$

Satz 2.7.2 *Die Menge $\mathbb{R}^2$ ist mit den in Definition 2.7.1 erklärten Abbildungen*

$$(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto z_1 + z_2 \in \mathbb{R}^2 \quad \textit{und} \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}^2$$

ein Körper.

Beweis. (A1), (A2), (A5), (A6) und (A9) (vgl. Abschnitt 2.1) rechnet man unter Benutzung der Körperaxiome von $\mathbb{R}$ direkt nach. Offensichtlich ist

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b) \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (1, 0) = (a, b) \quad \text{für alle} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Damit sind (A3) und (A7) nachgewiesen. Da außerdem

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0) \quad \text{für alle} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

und

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0) \quad \text{für alle} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ ,$$

gelten auch (A4) und (A8). □

Definition 2.7.3 *Der in Satz 2.7.2 angegebene Körper wird* **Körper der komplexen Zahlen** *genannt und mit* $\mathbb{C}$ *bezeichnet.*

Auch für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ werden wir statt $z_1 \cdot z_2$ meist nur $z_1 z_2$, statt $z_1 + (-z_2)$ einfach $z_1 - z_2$ und statt $z_1 z_2^{-1}$ auch $\dfrac{z_1}{z_2}$ schreiben.

Satz 2.7.4 *Die in den Sätzen 2.1.5 und 2.1.6 angegebenen Rechenregeln gelten auch in* $\mathbb{C}$.

Beweis. Die Regeln sind auch für $\mathbb{C}$ gültig, da bei der Ableitung dieser Regeln für $\mathbb{R}$ nur die Körperaxiome benutzt wurden. □

Bemerkung 2.7.5 Auch die Definitionen 2.3.7 und 2.6.5, die Aussagen (i), (ii) und (iii) von Satz 2.6.6 und der Satz 2.6.7 können unmittelbar auf komplexe Zahlen übertragen werden. □

Im Weiteren werden wir $\mathbb{C}$ wie folgt als eine so genannte **Körpererweiterung** von $\mathbb{R}$ verstehen. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(a) := (a, 0)$$

gegeben. Wie man sofort sieht, gilt dann

$$\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) \quad \text{und} \quad \varphi(a_1 \cdot a_2) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \quad \text{für alle} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Indem wir also $a \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(a) \in \mathbb{C}$ identifizieren, wird $\mathbb{R}$ zu einem Unterkörper von $\mathbb{C}$ und somit $\mathbb{C}$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{R}$.

Jetzt setzen wir noch

$$\mathrm{i} := (0, 1)\ .$$

Dann ist

$$\mathrm{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1\ .$$

Außerdem haben wir

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + b\,\mathrm{i} \quad \text{für alle} \quad (a, b) \in \mathbb{C}\ .$$

Jedes $z \in \mathbb{C}$ kann also in eindeutiger Weise in der Form

$$z = a + b\,\mathrm{i} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden. Das ist die übliche Schreibweise von komplexen Zahlen.

Definition 2.7.6 *Sei* $z = a + b\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$. *Dann nennt man* $\mathrm{Re}(z) := a$ *den* **Realteil** *von* z, $\mathrm{Im}(z) := b$ *den* **Imaginärteil** *von* z *und* $\overline{z} := a - b\,\mathrm{i}$ *die* **konjugiert komplexe Zahl** *zu* z. *Ist* $\mathrm{Re}(z) = 0$, *so heißt* z **rein imaginär**.

Beispiel 2.7.7 Sei $z = a + b\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$z^2 = (a + b\,\mathrm{i})^2 = a^2 - b^2 + 2ab\,\mathrm{i}\ .$$

Folglich haben wir

$$\mathrm{Re}\left(z^2\right) = a^2 - b^2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\left(z^2\right) = 2ab\ .$$

□

Satz 2.7.8 *Für* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *gilt:*

(i) $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ *und* $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\,\mathrm{i}}$,

(ii) $\overline{\overline{z}} = z$,

(iii) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ *und* $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$.

(iv) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die Aussagen können einfach nachgerechnet werden. Zum Beispiel gilt für $z = a + b\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$

$$z + \overline{z} = a + b\,\mathrm{i} + a - b\,\mathrm{i} = 2a \quad \text{und} \quad z - \overline{z} = a + b\,\mathrm{i} - a + b\,\mathrm{i} = 2b\,\mathrm{i}\,,$$

woraus sofort (i) folgt □

Die folgende Definition verallgemeinert den Begriff des Betrages einer reellen Zahl für komplexe Zahlen.

Definition 2.7.9 *Der* **Absolutbetrag** *oder einfach* **Betrag** *einer komplexen Zahl $z = a + b\,\mathrm{i}$ ist*

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Satz 2.7.10 *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:*

(i) $|z| \in \mathbb{R}$ *und* $|z| \geq 0$,

(ii) $|z| = 0 \iff z = 0$,

(iii) $|\overline{z}| = |z|$,

(iv) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ *und* $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$,

(v) $|z|^2 = z\overline{z}$,

(vi) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

(vii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. *(Dreiecksungleichung)*

Beweis. (i),(ii),(iii),(iv) Diese Aussagen sind offensichtlich.
(v) Für $z = a + b\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ haben wir

$$z\overline{z} = (a + b\,\mathrm{i})(a - b\,\mathrm{i}) = a^2 - (b\,\mathrm{i})^2 = a^2 + b^2 = |z|^2\,.$$

(vi) Wegen (i), (v) und Satz 2.7.8(iii) gilt

$$|z_1 z_2| = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1 z_2}} = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2} = \sqrt{z_1 \overline{z}_1 z_2 \overline{z}_2} = \sqrt{z_1 \overline{z}_1}\sqrt{z_2 \overline{z}_2} = |z_1||z_2|\,.$$

(vii) Aufgrund von (i) ist die Ungleichung (vi) äquivalent zu

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2\,,$$

d.h. zu

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1||z_2|\,.$$

Für die letzte Ungleichung schließen wir unter Benutzung von (iii),(iv),(v) und von Satz 2.7.8

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)\\
&= z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2\\
&= z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2+z_1\overline{z}_2+\overline{z_1\overline{z}_2}\\
&= |z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)\\
&\le |z_1|^2+|z_2|^2+2\,|\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)|\\
&\le |z_1|^2+|z_2|^2+2\,|z_1\overline{z}_2|\\
&= |z_1|^2+|z_2|^2+2\,|z_1||z_2|\ .
\end{aligned}$$

□

So wie reelle Zahlen als Punkte einer Geraden dargestellt werden können, können komplexe Zahlen als Punkte einer Ebene E, die dann **Gausssche Zahlenebene** oder **komplexe Ebene** genannt wird, beschrieben werden. Dazu wählt man ein kartesisches Koordinatensystem in E und ordnet $z = a+b\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ den Punkt in E mit den Koordinaten (a,b) zu. Die Koordinatenachsen korrespondieren dann zu $\mathbb{R}$ und zu $\mathbb{R}\,\mathrm{i} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0\}$. Sie werden entsprechend als **reelle Achse** bzw. **imaginäre Achse** bezeichnet.

In dieser geometrischen Interpretation der komplexen Zahlen entspricht die Addition zweier Zahlen der Addition der entsprechenden Vektoren. Ist $z \in \mathbb{C}$, so werden z und $-z$ durch entgegengerichte Vektoren beschrieben. Die konjugierte Zahl $\overline{z}$ erhält man, indem man z an der reellen Achse spiegelt. Desweiteren gibt $|z|$ den Abstand von z zum Koordinatenursprung an. Später werden wir noch sehen, dass die Abbildung $z \in \mathbb{C} \mapsto wz \in \mathbb{C}$ für ein $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$ einer Drehung um den Koordinatenursprung entspricht.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit

Satz 2.7.11 *Der Körper der komplexen Zahlen besitzt keine Anordnung. Das heißt, es gibt keine Menge $\mathbb{C}_+ \subseteq \mathbb{C}$, die den Axiomen (A10)-(A12) genügt.*

Beweis. Übung. □

2.8 Die Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$

Definition 2.8.1 (i) *Für $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sei*

$$x+y := (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

und

$$\alpha\cdot x := (\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)\ .$$

(ii) *Für $z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n$, $w = (w_1,\dots,w_n) \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ sei*

$$z+w := (z_1+w_1,\dots,z_n+w_n)$$

und

$$\lambda\cdot z := (\lambda z_1,\dots,\lambda z_n)\ .$$

Auch hier werden wir statt $\alpha\cdot x$ bzw. $\lambda\cdot z$ meistens einfach αx bzw. λz schreiben.

Satz 2.8.2 *$\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) ist mit den oben definierten Operationen ein n-dimensionaler reeller (bzw. komplexer) Vektorraum.* □

Definition 2.8.3 (i) *Das* **Skalarprodukt** *von* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *ist die reelle Zahl*

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \ .$$

(ii) *Das* **Skalarprodukt** *von* $z, w \in \mathbb{C}^n$ *ist die komplexe Zahl*

$$\langle z, w \rangle := \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k \ .$$

Satz 2.8.4 *Für alle* $z, \hat{z}, w, \hat{w} \in \mathbb{C}^n$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}$ *gilt:*

(i) $\langle z + \hat{z}, w \rangle = \langle z, w \rangle + \langle \hat{z}, w \rangle$ *und* $\langle z, w + \hat{w} \rangle = \langle z, w \rangle + \langle z, \hat{w} \rangle$,

(ii) $\langle \lambda z, w \rangle = \lambda \langle z, w \rangle$ *und* $\langle z, \lambda w \rangle = \overline{\lambda} \langle z, w \rangle$,

(iii) $\langle z, w \rangle = \overline{\langle w, z \rangle}$,

(iv) $\langle z, z \rangle \in \mathbb{R}$ *und* $\langle z, z \rangle \geq 0$,

(v) $\langle z, z \rangle = 0 \iff z = 0$.

Beweis. Diese Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition. □

Da $\mathbb{R}^n$ ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$ ist und da das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ die Einschränkung des Skalarproduktes in $\mathbb{C}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ ist, folgt:

Folgerung 2.8.5 *Für alle* $x, \hat{x}, y, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(i) $\langle x + \hat{x}, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle \hat{x}, y \rangle$ *und* $\langle x, y + \hat{y} \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, \hat{y} \rangle$,

(ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ *und* $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,

(iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

(iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$,

(v) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$. □

Definition 2.8.6 *Die* **Norm** *von* $x \in \mathbb{R}^n$ *(bzw.* $z \in \mathbb{C}^n$*) ist die reelle Zahl*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (\text{bzw. } \|z\| := \sqrt{\langle z, z \rangle}) \ .$$

Satz 2.8.7 *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}^n$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}$ *gilt:*

(i) $\|\lambda z\| = |\lambda| \cdot \|z\|$,

(ii) $\|z\| \geq 0$,

(iii) $\|z\| = 0 \iff z = 0$,

(iv) $|\langle z, w \rangle| \leq \|z\| \cdot \|w\|$, *(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)*

(v) $|\langle z, w \rangle| = \|z\| \cdot \|w\| \iff z = 0$ *oder* $w = \mu z$ *für ein* $\mu \in \mathbb{C}$,

(vi) $\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|$. *(Dreiecksungleichung)*

Beweis. (i),(ii),(iii) Diese Eigenschaften erhält man aus Satz 2.8.4.

(iv),(v) Ist $z = 0$ oder $w = \mu z$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$, so gilt offensichtlich $|\langle z, w\rangle| = \|z\| \cdot \|w\|$. Seien jetzt $z, w \in \mathbb{C}^n$ beliebig und gelte o.B.d.A. $z \neq 0$. Wir setzen

$$\lambda_1 := -\overline{\langle z, w\rangle} \quad \text{und} \quad \lambda_2 := \|z\|^2$$

und schließen unter Benutzung von Satz 2.8.4

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\lambda_1 z + \lambda_2 w\|^2 \\ &= \langle \lambda_1 z + \lambda_2 w, \lambda_1 z + \lambda_2 w\rangle \\ &= |\lambda_1|^2\|z\|^2 + \lambda_1\overline{\lambda}_2\langle z, w\rangle + \overline{\lambda}_1\lambda_2\overline{\langle z, w\rangle} + |\lambda_2|^2\|w\|^2 \\ &= \|z\|^2\left(\|z\|^2\|w\|^2 - |\langle z, w\rangle|^2\right) \ . \end{aligned}$$

Da $\|z\|^2 > 0$, erhalten wir hieraus $|\langle z, w\rangle|^2 \leq \|z\|^2\|w\|^2$, d.h. (iv). Außerdem sehen wir, dass $|\langle z, w\rangle| = \|z\| \cdot \|w\|$ nur dann gelten kann, wenn

$$\|\lambda_1 z + \lambda_2 w\| = 0 \ .$$

Die letzte Gleichung gilt aber nach (iii) nur dann, wenn

$$\lambda_1 z + \lambda_2 w = 0 \ ,$$

was wegen $\lambda_2 \neq 0$ zu

$$w = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} z$$

äquivalent ist. Damit ist auch (v) gezeigt.

(vi) Mit Hilfe von (iv) folgern wir für $z, w \in \mathbb{C}$, dass

$$\begin{aligned} \|z + w\|^2 &= \langle z + w, z + w\rangle \\ &= |\langle z + w, z + w\rangle| \\ &= |\langle z, z\rangle + \langle z, w\rangle + \langle w, z\rangle + \langle w, w\rangle| \\ &\leq \|z\|^2 + 2\,|\langle z, w\rangle| + \|w\|^2 \\ &\leq \|z\|^2 + 2\,\|z\|\,\|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|z\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

und somit

$$\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\| \ .$$

□

Eine triviale Konsequenz von Satz 2.8.7 ist

Folgerung 2.8.8 *Die in Satz 2.8.7 angegebenen Regeln gelten auch für die Norm in* $\mathbb{R}^n$. □

Kapitel 3

Folgen

3.1 Konvergenz in metrischen Räumen

Wir definieren zunächst, was ein metrischer Raum ist, und geben dann einige Beispiele an.

Definition 3.1.1 *Ein* **metrischer Raum** *ist ein Paar* (X, d) *bestehend aus einer nichtleeren Menge* X *und einer Abbildung* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *mit folgenden Eigenschaften.*

(M1) *Für alle* $x, y \in X$ *ist* $d(x, y) \geq 0$*, wobei*

$$d(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \; .$$

(M2) *Für alle* $x, y \in X$ *ist* $d(x, y) = d(y, x)$.

(M3) *Für alle* $x, y, z \in X$ *gilt* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. *(Dreiecksungleichung)*

Die Abbildung d *wird dann* **Metrik** *auf* X *genannt.*

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so nennt man die Elemente von X auch **Punkte** des metrischen Raumes und $d(x, y)$ den **Abstand** von x und y. Dementsprechend sagt man statt Metrik auch **Abstandsfunktion**.

Beispiel 3.1.2 Die Abbildung $d_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d_{\mathbb{R}}(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$, ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$. Dies folgt aus Satz 2.2.2. Zum Beispiel können wir die Eigenschaft (M3) aus der Dreiecksungleichung für den Betrag schließen. Für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}(x_1, x_2) &= |x_1 - x_2| \\ &= |(x_1 - x_3) + (x_3 - x_2)| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \\ &= d_{\mathbb{R}}(x_1, x_3) + d_{\mathbb{R}}(x_3, x_2) \; . \end{aligned}$$

Analog erhält man aus Satz 2.7.10, dass $d_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $d_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$, eine Metrik auf $\mathbb{C}$ ist. Wir nennen die Metriken $d_{\mathbb{R}}$ und $d_{\mathbb{C}}$ **Standardmetrik** auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. □

Als Verallgemeinerung von Beispiel 3.1.2 haben wir:

Beispiel 3.1.3 Durch $d_{\mathbb{R}^n}(x_1, x_2) := \|x_1 - x_2\|$ für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und $d_{\mathbb{C}^n}(z_1, z_2) := \|z_1 - z_2\|$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^n$ sind Metriken auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ definiert. Wir nennen $d_{\mathbb{R}^n}$ und $d_{\mathbb{C}^n}$ **Standardmetrik** auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$. □

Beispiel 3.1.4 Sei X eine nichtleere Menge und sei $d : X \times X \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } \quad x = y \\ 1 & \text{, falls } \quad x \neq y \end{cases}$$

definiert. Wie man leicht sieht, ist dann (X,d) ein metrischer Raum. Solch ein metrischer Raum (X,d) und dessen Metrik d heißen **diskret**. □

Beispiel 3.1.5 Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Dann ist die Einschränkung von d auf $A \times A$ eine Metrik auf A. Sie wird die von d **induzierte Metrik** auf A genannt. Insbesondere ist $d_{\mathbb{R}^n}$ die von $d_{\mathbb{C}^n}$ induzierte Metrik auf $\mathbb{R}^n$. □

Satz 3.1.6 *Seien $(X_1,d_1),\ldots,(X_n,d_n)$ metrische Räume. Sei $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ und sei $d : X \times X \to \mathbb{R}$ durch*

$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j,y_j)^2}$$

definiert. Dann ist (X,d) ein metrischer Raum.

Beweis. Für d sind die Eigenschaften (M1) und (M2) sofort einzusehen. Wir zeigen (M3). Seien $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n),(z_1,\ldots,z_n) \in X$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichungen für (X_j,d_j), $j = 1,\ldots,n$, und Satz 2.8.7(vi) schließen wir

$$\begin{aligned}
d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j,y_j)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(d_j(x_j,z_j) + d_j(z_j,y_j)\right)^2} \\
&= \|(d_1(x_1,z_1),\ldots,d_n(x_n,z_n)) + (d_1(z_1,y_1),\ldots,d_n(z_n,y_n))\| \\
&\leq \|(d_1(x_1,z_1),\ldots,d_n(x_n,z_n))\| + \|(d_1(z_1,y_1),\ldots,d_n(z_n,y_n))\| \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j,z_j)^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} d_j(z_j,y_j)^2} \\
&= d((x_1,\ldots,x_n),(z_1,\ldots,z_n)) + d((z_1,\ldots,z_n),(y_1,\ldots,y_n)) \,.
\end{aligned}$$

□

Definition 3.1.7 *Der in Satz 3.1.6 angegebene metrische Raum (X,d) heißt* **Produkt** *der metrischen Räume $(X_1,d_1),\ldots,(X_n,d_n)$, die Metrik d* **Produktmetrik** *von $d_1,\ldots,d_n$.*

Beispiel 3.1.8 Der metrische Raum $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ ist das n-fache Produkt des metrischen Raumes $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$. Genauso ist $(\mathbb{C}^n, d_{\mathbb{C}^n})$ das n-fache Produkt von $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}})$. □

Wir wollen jetzt erklären, was man in einem metrischen Raum unter Konvergenz versteht. Dazu müssen wir zuerst definieren, was eine Folge ist.

Definition 3.1.9 *Eine* **Folge** *in einer Menge M ist eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to M$.*

Wir werden im Weiteren Folgen $\varphi : \mathbb{N} \to M$, $\varphi(k) = x_k$, in der Form $(x_1,x_2,x_3,\ldots)$ bzw. $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ oder einfach (x_k) angeben. Manchmal werden wir auch $(x_k)_{k\geq l}$ für ein $l \in \mathbb{Z}$ schreiben. Darunter verstehen wir dann die Folge $(x_l, x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots)$.

Definition 3.1.10 *Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X.*

(i) *Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$* **konvergiert gegen** *$a \in X$* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0 \in \mathbb{N} \, \forall k \geq k_0 : d(x_k, a) < \varepsilon \, .$$

Der Punkt a wird dann **Grenzwert** *der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genannt.*

(ii) *Konvergiert die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in X$, so heißt sie* **konvergent**, *andernfalls* **divergent**.

Konvergiert (x_k) gegen a, so schreiben wir dafür

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a$$

oder

$$x_k \to a \quad \text{für} \quad k \to \infty \, .$$

Als triviales Beispiel für konvergente Folgen haben wir:

Beispiel 3.1.11 Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, welche **konstant** ist, d.h. es ist

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots \, .$$

Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_1 \, .$$

□

Der nächste Satz besagt, dass in einem metrischen Raum der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt ist.

Satz 3.1.12 *Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei (x_k) eine Folge in X und gelte*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \quad \textit{und} \quad \lim_{k\to\infty} x_k = b \, . \tag{3.1.1}$$

Dann ist $a = b$.

Beweis. Angenommen, $a \neq b$. Dann ist

$$\varepsilon := \frac{d(a,b)}{2} > 0 \, .$$

Wegen (3.1.1) existieren $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_k, a) < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \geq k_0$$

und

$$d(x_k, b) < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \geq k_1 \, .$$

Hieraus leiten wir mit (M3)

$$d(a,b) \leq d(a, x_k) + d(x_k, b) < \varepsilon + \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \geq \max\{k_0, k_1\}$$

und folglich

$$d(a,b) < d(a,b)$$

ab. Damit haben wir einen Widerspruch erhalten und der Satz ist bewiesen. □

Definition 3.1.13 *Eine Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eines metrischen Raumes* (X,d) *heißt beschränkt* $:\Longleftrightarrow$

$$\exists\, a \in X\, \exists\, c \in \mathbb{R}_+\, \forall\, k \in \mathbb{N} : d(x_k, a) \leq c\ .$$

Satz 3.1.14 *Jede konvergente Folge eines metrischen Raumes* (X,d) *ist beschränkt.*

Beweis. Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und gelte $x_k \to a$ für $k \to \infty$. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_k, a) < 1 \quad \text{für alle} \quad k \geq k_0\ .$$

Setzen wir also $c := \max\{d(x_1,a),\ldots,d(x_{k_0},a)\} + 1$, so erhalten wir

$$d(x_k, a) \leq c \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}\ .$$

□

Satz 3.1.15 *Seien* $(X_1,d_1),\ldots,(X_n,d_n)$ *metrische Räume, sei* (X,d) *das Produkt dieser Räume und sei* $((x_{k1},\ldots,x_{kn}))_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* X. *Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty}(x_{k1},\ldots,x_{kn}) = (a_1,\ldots,a_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, j \in \{1,\ldots,n\} : \lim_{k\to\infty} x_{kj} = a_j\ .$$

Beweis. ($\Longrightarrow$) Dies folgt aus

$$\begin{aligned} d_j(x_{kj},a_j) &= \sqrt{d_j(x_{kj},a_j)^2} \\ &\leq \sqrt{d_1(x_{k1},a_1)^2 + \cdots + d_n(x_{kn},a_n)^2} \\ &= d((x_{k1},\ldots,x_{kn}),(a_1,\ldots,a_n)) \end{aligned}$$

für $j = 1,\ldots,n$.

($\Longleftarrow$) Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existieren $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$d_j(x_{kj},a_j) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad \text{für alle} \quad k \geq k_j \quad \text{und} \quad j = 1,\ldots,n\ .$$

Wir setzen $k_0 := \max\{k_1,\ldots,k_n\}$. Für $k \geq k_0$ gilt dann

$$\begin{aligned} d((x_{k1},\ldots,x_{kn}),(a_1,\ldots,a_n)) &= \sqrt{d_1(x_{k1},a_1)^2 + \cdots + d_n(x_{kn},a_n)^2} \\ &< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n} + \cdots + \frac{\varepsilon^2}{n}} \\ &= \varepsilon\ . \end{aligned}$$

□

3.2 Konvergente Folgen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$

Wenn nicht anders bemerkt, seien im Weiteren $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ mit der Standardmetrik und Teilmengen dieser Räume mit der von der Standardmetrik induzierten Metrik versehen.

Die Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ erlaubt folgende Überlegung.

Definition 3.2.1 *Eine Folge* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *oder* $\mathbb{C}^n$ *heißt* **Nullfolge** $:\Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$.

Aus dieser Definition erhält man sofort:

Satz 3.2.2 *Eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}^n$ ist genau dann eine Nullfolge, wenn $(\|z_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.* □

Satz 3.2.3 *Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}^n$. Dann konvergiert $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $a \in \mathbb{C}^n$, wenn $(z_k - a)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.*

Beweis. Dies folgt aus

$$d_{\mathbb{C}^n}(z_k, a) = \|z_k - a\| = d_{\mathbb{C}^n}(z_k - a, 0)\ .$$

□

Beispiel 3.2.4 Die Folge $(1/k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge in $\mathbb{R}$. Nach Folgerung 2.4.2 existiert nämlich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{k_0} < \varepsilon$$

und folglich mit

$$d_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{k}, 0\right) = \left|\frac{1}{k} - 0\right| = \frac{1}{k} \le \frac{1}{k_0} < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \ge k_0\ .$$

□

Beispiel 3.2.5 Sei $z \in \mathbb{C}$ und sei $|z| < 1$. Dann ist $\left(z^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{C}$. Ist nämlich $\varepsilon > 0$, so existiert nach Folgerung 2.6.9(ii) ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|z|^{k_0} < \varepsilon$$

und folglich mit

$$d_{\mathbb{C}}\left(z^k, 0\right) = \left|z^k - 0\right| = |z|^k \le |z|^{k_0} < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \ge k_0\ .$$

□

Beispiel 3.2.6 Auch die Folge $\left(k/z^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ für ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ ist eine Nullfolge. Dies sieht man folgendermaßen. Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $c := |z| - 1 > 0$ und wählen $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\frac{1}{k_0} < \frac{c^2\varepsilon}{2}\ .$$

Wegen $c > 0$ gilt für alle $k \ge 2$

$$|z|^k = (1+c)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} c^j \ge \binom{k}{2} c^2 = \frac{k(k-1)}{2}\, c^2\ .$$

Es folgt, dass für alle $k \ge k_0 + 1$

$$\left|\frac{k}{z^k}\right| = \frac{k}{|z|^k} \le \frac{2}{(k-1)c^2} \le \frac{2}{k_0 c^2} < \varepsilon\ .$$

□

Im Folgenden leiten wir Rechenregeln für konvergente Folgen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ ab.

Satz 3.2.7 *Seien $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $\mathbb{C}^n$ und sei*

$$\lim_{k\to\infty} z_k = a \quad \textit{und} \quad \lim_{k\to\infty} w_k = b\ .$$

Dann gilt:

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} (z_k + w_k) = a + b$,

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} (\lambda z_k) = \lambda a$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$,

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty} \|z_k\| = \|a\|$.

Beweis. (i) Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existieren $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|z_k - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad k \geq k_0$$

und

$$\|w_k - b\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad k \geq k_1 \ .$$

Für alle $k \geq \max\{k_0, k_1\}$ gilt dann

$$\|(z_k + w_k) - (a + b)\| = \|(z_k - a) + (w_k - b)\| \leq \|z_k - a\| + \|w_k - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

(ii) Für $\lambda = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei also $\lambda \neq 0$ und sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $k_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\|z_k - a\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \quad \text{für alle} \quad k \geq k_2 \ .$$

Dann gilt auch

$$\|\lambda z_k - \lambda a\| = \|\lambda(z_k - a)\| = |\lambda| \cdot \|z_k - a\| < \varepsilon$$

für alle $k \geq k_2$.

(iii) Aus Satz 2.8.7(vi) folgt

$$d_{\mathbb{R}}(\|z_k\|, \|a\|) = |\,\|z_k\| - \|a\|\,| \leq \|z_k - a\| = d_{\mathbb{C}^n}(z_k, a) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \ .$$

Dies liefert die Behauptung. □

Satz 3.2.8 *Seien* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zwei Folgen komplexer Zahlen und sei*

$$\lim_{k\to\infty} z_k = a \quad \textit{und} \quad \lim_{k\to\infty} w_k = b \ .$$

Dann gilt:

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} (z_k w_k) = ab$.

(ii) *Ist* $b \neq 0$, *so existiert ein solches* $l \in \mathbb{N}$, *dass* $w_k \neq 0$ *für alle* $k \geq l$, *und* $(z_k/w_k)_{k\geq l}$ *konvergiert gegen* a/b.

Beweis. (i) Nach Satz 3.1.14 ist die Folge $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Also existiert ein $c \in \mathbb{R}_+$ mit

$$|w_k| \leq c \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \ .$$

Außerdem gilt

$$|z_k w_k - ab| = |(z_k - a)w_k + a(w_k - b)| \leq |z_k - a| \cdot |w_k| + |a| \cdot |w_k - b| \ .$$

Es folgt, dass

$$|z_k w_k - ab| \leq c\,|z_k - a| + (|a| + 1)|w_k - b| \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \ . \tag{3.2.1}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung können wir $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ so wählen, dass

$$|z_k - a| < \frac{\varepsilon}{2c} \quad \text{für alle} \quad k \geq k_0$$

und
$$|w_k - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \quad \text{für alle} \quad k \geq k_1 \ .$$
Wegen (3.2.1) gilt dann
$$|z_k w_k - ab| < c\frac{\varepsilon}{2c} + (|a|+1)\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} = \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \geq \max\{k_0, k_1\} \ .$$

(ii) Sei $b \neq 0$. Dann ist $|b| > 0$. Nach Voraussetzung existiert somit ein $l \in \mathbb{N}$ mit
$$|w_k - b| < \frac{|b|}{2} \quad \text{für alle} \quad k \geq l \ .$$
Da
$$|b| - |w_k| \leq |w_k - b| \ ,$$
folgt
$$|w_k| > \frac{|b|}{2} \quad \text{für alle} \quad k \geq l \ .$$
Damit ist der erste Teil der Behauptung (ii) bewiesen. Aufgrund von (i) genügt es für den zweiten Teil zu zeigen, dass $(1/w_k)_{k \geq l}$ gegen $1/b$ konvergiert. Dies erhält man aber sofort aus
$$\left| \frac{1}{w_k} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|w_k - b|}{|w_k|\,|b|} \leq \frac{2}{|b|^2} |w_k - b| \quad \text{für alle} \quad k \geq l \ .$$
□

Beispiel 3.2.9 Nach den Sätzen 3.2.7 und 3.2.8 und den Beispielen 3.1.11 und 3.2.4 ist
$$\lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} 1 + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 1$$
und
$$\lim_{k\to\infty} \frac{4k^2+7k}{2k^2-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{4 + 7\frac{1}{k}}{2 - \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} 4 + 7 \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k}}{\lim\limits_{k\to\infty} 2 - \left(\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k}\right)^2} = 2 \ .$$
□

Satz 3.2.10 *Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen mit*
$$x_k \leq y_k \quad \textit{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$
und gelte $x_k \to a$ und $y_k \to b$ für $k \to \infty$. Dann ist $a \leq b$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existieren $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ mit
$$|x_k - a| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \geq k_0$$
und
$$|y_k - b| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \geq k_1 \ .$$
Für $k \geq \max\{k_0, k_1\}$ gilt dann
$$a - x_k \leq |x_k - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad y_k - b \leq |y_k - b| < \varepsilon$$
und folglich
$$a - \varepsilon < x_k \leq y_k < b + \varepsilon \ .$$
Also gilt
$$a - b < 2\varepsilon \quad \text{für alle} \quad \varepsilon > 0 \ .$$
Dies ist nur möglich, wenn $a - b \leq 0$. □

Satz 3.2.11 *Sei* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen und sei*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a\ .$$

Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[m]{x_k} = \sqrt[m]{a} \quad \textit{für alle} \quad m \in \mathbb{N}\ .$$

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$. Nach Satz 3.2.10 ist $a \geq 0$. Wir unterscheiden die Fälle $a = 0$ und $a > 0$.

1. Fall: $a = 0$**.** Dann ist

$$d_{\mathbb{R}}\left(\sqrt[m]{x_k}, \sqrt[m]{a}\right) = \sqrt[m]{x_k} \quad \text{und} \quad d_{\mathbb{R}}(x_k, a) = x_k\ .$$

Die Behauptung folgt somit aus

$$\sqrt[m]{x_k} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad x_k < \varepsilon^m\ .$$

2. Fall: $a > 0$**.** Wie man einfach nachrechnet, gilt

$$y_1^m - y_2^m = (y_1 - y_2)\sum_{j=1}^{m} y_1^{m-j} y_2^{j-1} \quad \text{für} \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Setzt man hier $y_1 := \sqrt[m]{x_k}$ und $y_2 = \sqrt[m]{a}$, so erhält man

$$\begin{aligned} |x_k - a| &= \left| \left(\sqrt[m]{x_k} - \sqrt[m]{a}\right) \sum_{j=1}^{m} x_k^{(m-j)/m} a^{(j-1)/m} \right| \\ &= \left|\sqrt[m]{x_k} - \sqrt[m]{a}\right| \sum_{j=1}^{m} x_k^{(m-j)/m} a^{(j-1)/m} \\ &\geq \left|\sqrt[m]{x_k} - \sqrt[m]{a}\right| a^{(m-1)/m} \end{aligned}$$

und folglich

$$\left|\sqrt[m]{x_k} - \sqrt[m]{a}\right| \leq a^{(1-m)/m} |x_k - a|\ .$$

Dies liefert die Behauptung. □

Folgerung 3.2.12 *Ist* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *wie in Satz 3.2.11, so gilt*

$$\lim_{k\to\infty} x_k^q = a^q \quad \textit{für alle} \quad q \in \mathbb{Q} \quad \textit{mit} \quad q \geq 0\ .$$

Beweis. Das ergibt sich aus Satz 3.2.8(i) und Satz 3.2.11. □

Beispiel 3.2.13 Nach Beispiel 3.2.4 und Folgerung 3.2.12 gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^q} = 0 \quad \text{für alle} \quad q \in \mathbb{Q} \quad \text{mit} \quad q > 0\ .$$

□

Auch der folgende Satz wird häufig zur Berechnung von Grenzwerten benutzt.

Satz 3.2.14 (Einschließungsregel) *Seien* (x_k), (y_k) *und* $(\hat{y}_k)$ *Folgen reeller Zahlen mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *Es existiert ein* $l \in \mathbb{N}$ *mit*

$$y_k \leq x_k \leq \hat{y}_k \quad \textit{für alle} \quad k \geq l \; .$$

(2) *Die Folgen* (y_k) *und* $(\hat{y}_k)$ *sind konvergent und*

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} \hat{y}_k \; .$$

Dann ist auch die Folge (x_k) *konvergent und*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k \; .$$

Beweis. Sei

$$a := \lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} \hat{y}_k$$

und sei $\varepsilon > 0$. Wegen (2) existieren $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|y_k - a| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle} \quad k \geq k_0$$

und

$$|\hat{y}_k - a| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle} \quad k \geq k_1 \; .$$

Wegen (1) gilt

$$|x_k - y_k| = x_k - y_k \leq \hat{y}_k - y_k = |\hat{y}_k - y_k| \quad \text{für alle} \quad k \geq l \; .$$

Es folgt, dass

$$|x_k - a| \leq |x_k - y_k| + |y_k - a| \leq |\hat{y}_k - y_k| + |y_k - a| \leq |\hat{y}_k - a| + 2\,|y_k - a| < \varepsilon$$

für alle $k \geq \max\{k_0, k_1, l\}$. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Beispiel 3.2.15 Es ist

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1 \; . \tag{3.2.2}$$

Nach der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel (Satz 2.6.19) gilt nämlich für $k \geq 2$

$$\sqrt[k]{k} = \Big(\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}\cdot\underbrace{1\cdots 1}_{k-2}\Big)^{1/k} = G\Big(\sqrt{k}, \sqrt{k}, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-2}\Big) \leq A\Big(\sqrt{k}, \sqrt{k}, \underbrace{1,\ldots,1}_{k-2}\Big) = \frac{2\sqrt{k} + k - 2}{k}$$

und somit

$$1 \leq \sqrt[k]{k} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{k}} \; .$$

Da

$$\lim_{k\to\infty} 1 = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{k}}\right) = 1 \; ,$$

folgt (3.2.2) mittels der Einschließungsregel. □

Beispiel 3.2.16 Für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ ist

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{x} = 1 \; . \tag{3.2.3}$$

Zum Nachweis benutzen wir wieder die Einschließungsregel. Nach dem Archimedischen Axiom existieren $l_0, l_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{l_0} \leq x \leq l_1 \; .$$

Für alle $k \geq \max\{l_0, l_1\}$ gilt dann

$$\frac{1}{k} \leq x \leq k \; ,$$

also auch

$$\frac{1}{\sqrt[k]{k}} \leq \sqrt[k]{x} \leq \sqrt[k]{k} \; .$$

Da nach Beispiel 3.2.15 und Satz 3.2.8(ii)

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1 \; ,$$

folgt (3.2.3). □

3.3 Monotone Folgen und die Zahl e

Definition 3.3.1 *Eine Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen heißt* **monoton wachsend** *(bzw.* **monoton fallend***)* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : a_k \leq a_{k+1} \quad (\textit{bzw. } \forall\, k \in \mathbb{N} : a_k \geq a_{k+1}) \; .$$

Sie heißt **streng monoton wachsend** *(bzw.* **streng monoton fallend***)* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : a_k < a_{k+1} \quad (\textit{bzw. } \forall\, k \in \mathbb{N} : a_k > a_{k+1}) \; .$$

Sie wird **monoton** *genannt* $:\Longleftrightarrow$ $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ist monoton wachsend oder monoton fallend.*

Definition 3.3.2 *Eine Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen heißt* **nach oben** *(bzw.* **nach unten***)* **beschränkt** $:\Longleftrightarrow$ *Die Menge* $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ *ist nach oben (bzw. nach unten) beschränkt.*

Satz 3.3.3 (i) *Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen konvergiert gegen* $\sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

(ii) *Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen konvergiert gegen* $\inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. (i) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge von reellen Zahlen. Sei $a := \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ und sei $\varepsilon > 0$. Nach der Eigenschaft (Sup1) haben wir

$$x_k \leq a \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \; .$$

Außerdem existiert aufgrund von (Sup2) ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$x_{k_0} > a - \varepsilon \; .$$

Folglich gilt für alle $k \geq k_0$

$$|x_k - a| = a - x_k \leq a - x_{k_0} < \varepsilon \; .$$

Damit ist

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a$$

gezeigt.

(ii) Analog. □

Als Anwendung des letzten Satzes beweisen wir:

Satz 3.3.4 *Die Folgen* $\left((1+1/k)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $\left((1+1/k)^{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *sind konvergent und*

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} .$$

Beweis. Wir setzen

$$x_k := \left(1+\frac{1}{k}\right)^k , \quad \hat{x}_k := \left(1-\frac{1}{k}\right)^k \quad \text{und} \quad y_k := \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} .$$

Die Folgen (x_k) und $(\hat{x}_k)$ sind streng monoton wachsend. Nach der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel (Satz 2.6.19) gilt nämlich für $k \in \mathbb{N}$

$$x_k = G\Big(\underbrace{1+\frac{1}{k},\ldots,1+\frac{1}{k}}_{k},1\Big)^{k+1} < A\Big(\underbrace{1+\frac{1}{k},\ldots,1+\frac{1}{k}}_{k},1\Big)^{k+1} = x_{k+1}$$

und genauso

$$\hat{x}_k = G\Big(\underbrace{1-\frac{1}{k},\ldots,1-\frac{1}{k}}_{k},1\Big)^{k+1} < A\Big(\underbrace{1-\frac{1}{k},\ldots,1-\frac{1}{k}}_{k},1\Big)^{k+1} = \hat{x}_{k+1} .$$

Dagegen ist die Folge (y_k) streng monoton fallend, denn

$$y_k = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{-(k+1)} = \left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{-(k+1)} = \frac{1}{\hat{x}_{k+1}} .$$

Da $x_k < y_k$, haben wir also

$$x_l < x_k < y_k < y_l \quad \text{für alle} \quad k,l \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad k > l .$$

Insbesondere ist jedes y_l eine obere Schranke von $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ und jedes x_l eine untere Schranke von $\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$. Nach Satz 3.3.3 folgt, dass die Folgen (x_k) und (y_k) konvergent sind. Schließlich erhalten wir mit Satz 3.2.8, dass

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)x_k\right) = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdot\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} x_k .$$

□

Definition 3.3.5 *Der Grenzwert der Folgen* $\left((1+1/k)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *und* $\left((1+1/k)^{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *wird* **Eulersche Zahl** *genannt und mit* e *bezeichnet.*

Bemerkung 3.3.6 (i) Seien x_k und y_k wie im Beweis von Satz 3.3.4. Die Überlegungen dort zeigen, dass das Mengensystem $\{[x_k,y_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist und dass

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}}[x_k,y_k] = \{\mathrm{e}\} .$$

Insbesondere ist $2 < \mathrm{e} < 3$, denn

$$2 = x_1 < \mathrm{e} < y_5 = \frac{6^6}{5^6} = \frac{46656}{15625} < 3 .$$

(ii) Die Eulersche Zahl e ist irrational (vgl. Königsberger: Analysis 1, Abschnitt 8.2).

□

3.4 Offene, abgeschlossene und dichte Mengen

Wir betrachten einen metrischen Raum (X, d).

Definition 3.4.1 *Sei $x \in X$ und sei $\varepsilon > 0$. Die Menge*

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

heißt **offene ε-Kugel** *um x.*

Beispiel 3.4.2 (i) Im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d_\mathbb{R})$ ist

$$B_\varepsilon(x) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\ .$$

(ii) Ist d die diskrete Metrik auf X, so ist

$$B_\varepsilon(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{, falls } \varepsilon \leq 1 \\ X & \text{, falls } \varepsilon > 1 \end{cases} \ .$$

□

Definition 3.4.3 *Eine Menge $U \subseteq X$ heißt* **offen** $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, x \in U\, \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U\ .$$

Satz 3.4.4 *Jede offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ ist offen.*

Beweis. Sei $x \in X$, sei $\varepsilon > 0$ und sei $y \in B_\varepsilon(x)$. Wir müssen zeigen, dass ein $\delta > 0$ mit

$$B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x) \tag{3.4.1}$$

existiert. Wir setzen $\delta := \varepsilon - d(x, y)$. Wegen $y \in B_\varepsilon(x)$, d.h. $d(x, y) < \varepsilon$ ist $\delta > 0$. Sei $z \in B_\delta(y)$. Dann ist $d(y, z) < \delta$, d.h. $d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon$. Mit $(M3)$ folgt

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon\ ,$$

d.h. $z \in B_\varepsilon(x)$. Somit gilt (3.4.1). □

Beispiel 3.4.5 Jedes offene Intervall $]a, b[$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Setzen wir nämlich

$$x := \frac{a + b}{2} \quad \text{und} \quad \varepsilon := \frac{b - a}{2} > 0\ ,$$

so ist

$$B_\varepsilon(x) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[=]a, b[\ .$$

Also ist $]a, b[$ nach Satz 3.4.4 tatsächlich offen. □

Definition 3.4.6 (i) *Eine* **Topologie** *auf einer nichtleeren Menge X ist ein Mengensystem $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften.*

(Top1) *Es ist $X \in \mathcal{O}$ und $\emptyset \in \mathcal{O}$.*

(Top2) *Für jedes beliebige Mengensystem $\{U_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{O}$ ist $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}$.*

(Top3) *Sind $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$, so ist auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$.*

(ii) *Ein* **topologischer Raum** *ist ein Paar* $(X, \mathcal{O})$ *bestehend aus einer nichtleeren Menge* X *und einer Topologie* $\mathcal{O}$ *auf* X.

Satz 3.4.7 *Das Mengensystem*

$$\mathcal{O}(X,d) := \{U \subseteq X : U \text{ ist offen}\}$$

ist eine Topologie auf X.

Beweis. Offensichtlich sind X und $\emptyset$ offen. Damit gilt (Top1). Sei $\{U_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{O}(X,d)$ und sei $x \in \bigcup\limits_{j \in J} U_j$. Dann ist $x \in U_{j_0}$ für ein $j_0 \in J$. Da U_{j_0} offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B_\varepsilon(x) \subseteq U_{j_0} \ ,$$

also auch mit

$$B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j \ .$$

Damit ist (Top2) gezeigt. Seien schließlich $U_1, U_2 \in \mathcal{O}(X,d)$ und sei $x \in U_1 \cap U_2$. Da U_1 und U_2 offen sind, existieren $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mit

$$B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U_1 \quad \text{und} \quad B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq U_2 \ .$$

Setzen wir jetzt $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, so ist $\varepsilon > 0$, und es gilt

$$B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U_1 \quad \text{und} \quad B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq U_2 \ ,$$

also auch

$$B_\varepsilon(x) \subseteq U_1 \cap U_2 \ .$$

Damit haben wir auch (Top3) nachgewiesen. □

Definition 3.4.8 *Eine Menge* $U \subseteq X$ *heißt* **Umgebung** *von* $x \in X :\iff U$ *ist offen und* $x \in U$.

Insbesondere ist jede Kugel $B_\varepsilon(x)$ eine Umgebung von x, weshalb man $B_\varepsilon(x)$ auch **ε-Umgebung** von x nennt.

Im Weiteren werden wir die folgende Sprechweise benutzen.

Definition 3.4.9 *Sei für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *eine Aussage* $A(k)$ *gegeben. Die Aussage* $A(k)$ **gilt für fast alle** $k :\iff \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, k \geq k_0 : A(k)$.

Der nächste Satz liefert äquivalente Definitionen für Konvergenz in metrischen Räumen.

Satz 3.4.10 *Sei* (x_k) *eine Folge in* X *und sei* $a \in X$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *Es gilt* $x_k \to a$ *für* $k \to \infty$.

(ii) *Für alle* $\varepsilon > 0$ *gilt*

$$x_k \in B_\varepsilon(a) \quad \text{für fast alle } k \ .$$

(iii) *Für alle Umgebungen* U *von* a *gilt*

$$x_k \in U \quad \text{für fast alle } k \ .$$

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist klar. Wir zeigen (ii)$\Longleftrightarrow$(iii).

Gelte (ii) und sei U eine Umgebung von a. Da U offen ist und da $a \in U$, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq U$. Da wegen (ii)

$$x_k \in B_\varepsilon(a) \quad \text{für fast alle } k \, ,$$

folgt

$$x_k \in U \quad \text{für fast alle } k \, .$$

Damit ist (ii)$\Longrightarrow$(iii) gezeigt.

Gelte (iii) und sei $\varepsilon > 0$. Da $B_\varepsilon(a)$ eine Umgebung von a ist, gilt wegen (iii)

$$x_k \in B_\varepsilon(a) \quad \text{für fast alle } k \, .$$

Damit ist auch (iii)$\Longrightarrow$(ii) bewiesen. □

Bemerkung 3.4.11 Nach Satz 3.4.10 braucht man für die Definition der Konvergenz von Folgen in einem metrischen Raum (X, d) nur wissen, was das System $\mathcal{O}(X, d)$ der offenen Mengen ist. Dies erlaubt es, den Konvergenzbegriff auf topologische Räume auszudehnen (vgl. z.B. H. Schubert: Topologie). □

Wir betrachten weiterhin einen metrischen Raum (X, d) und definieren:

Definition 3.4.12 *Eine Menge $A \subseteq X$ heißt* **abgeschlossen** $:\Longleftrightarrow$ *$X \setminus A$ ist offen.*

Satz 3.4.13 *Für das Mengensystem*

$$\mathcal{F}(X, d) := \{A \subseteq X : A \textit{ ist abgeschlossen}\}$$

gilt:

(i) *Es sind $X, \emptyset \in \mathcal{F}(X, d)$.*

(ii) *Für jedes beliebige Mengensystem $\{A_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{F}(X, d)$ ist $\bigcap_{j \in J} A_j \in \mathcal{F}(X, d)$.*

(iii) *Sind $A_1, A_2 \in \mathcal{F}(X, d)$, so ist auch $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}(X, d)$.*

Beweis. Dies folgt aus den Sätzen 1.2.10 und 3.4.7. □

Der nächste Satz charakterisiert abgeschlossenen Mengen durch konvergente Folgen.

Satz 3.4.14 *Eine Menge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Ist (x_k) eine Folge in A, ist $x \in X$ und gilt $x_k \to x$ für $k \to \infty$, so ist $x \in A$.*

Beweis. ($\Longrightarrow$) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, sei (x_k) eine Folge in A und gelte

$$x_k \to x \quad \text{für} \quad k \to \infty \, . \tag{3.4.2}$$

Angenommen, es ist $x \notin A$, d.h. $x \in X \setminus A$. Da $X \setminus A$ offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$. Da wegen (3.4.2)

$$x_k \in B_\varepsilon(x) \quad \text{für fast alle } k \, ,$$

folgt

$$x_k \in X \setminus A \quad \text{für fast alle } k \, .$$

Das ist ein Widerspruch dazu, dass (x_k) eine Folge in A ist. Also muss $x \in A$ gelten.

($\Longleftarrow$) Wir beweisen diese Implikation durch Kontraposition und setzen deshalb jetzt voraus, dass $A \subseteq X$ nicht abgeschlossen, also $X \setminus A$ nicht offen ist. Dann existiert ein $x \in X \setminus A$ mit

$$B_\varepsilon(x) \not\subseteq X \setminus A \quad \text{für alle} \quad \varepsilon > 0 \, ,$$

d.h. mit

$$B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \quad \text{für alle} \quad \varepsilon > 0 \, .$$

Somit können wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in B_{1/k}(x) \cap A$ wählen. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$x_k \in A \quad \text{und} \quad d(x_k, x) < \frac{1}{k} \, .$$

Folglich ist (x_k) eine Folge in A mit $x_k \to x$ für $k \to \infty$. Da aber $x \notin A$, ist damit der Satz bewiesen. □

Beispiel 3.4.15 Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ist nämlich (x_k) eine Folge in $[a, b]$, d.h.

$$a \leq x_k \leq b \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \, ,$$

und gilt $x_k \to x$ für $k \to \infty$, so muss nach Satz 3.2.10 auch

$$a \leq x \leq b \, , \quad \text{d.h.} \quad x \in [a, b]$$

gelten. Nach Satz 3.4.14 ist somit $[a, b]$ tatsächlich abgeschlossen. □

Wir definieren jetzt noch, was dichte Teilmengen sind.

Definition 3.4.16 *Eine Menge $C \subseteq X$ heißt* **dicht** *(in X)* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, x \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists\, y \in C : d(x, y) < \varepsilon \, .$$

Satz 3.4.17 *Eine Menge $C \subseteq X$ ist genau dann dicht, wenn zu jedem $x \in X$ eine Folge (y_k) in C mit $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = x$ existiert.*

Beweis. Übung. □

Beispiel 3.4.18 Die Menge $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$. Tatsächlich existiert nach Folgerung 2.4.3 zu jedem $x \in \mathbb{R}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $q \in \mathbb{Q}$ mit

$$x - \varepsilon < q < x + \varepsilon \, ,$$

d.h. mit

$$d_{\mathbb{R}}(x, q) = |x - q| < \varepsilon \, .$$

□

3.5 Der Satz von Bolzano–Weierstrass

Definition 3.5.1 *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einer Menge X und sei $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge $\left(x_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$, also die Abbildung*

$$j \in \mathbb{N} \mapsto x_{k_j} \in X \, ,$$

Teilfolge *von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Offensichtlich gilt:

Satz 3.5.2 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Konvergiert $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in X$, so konvergiert auch jede Teilfolge $\left(x_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a.* $\square$

Der nächste Satz ist nach Bernhard Bolzano (1781-1848) und Karl Weierstrass (1815-1897) benannt.

Satz 3.5.3 (Satz von Bolzano–Weierstrass) *Jede beschränkte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge $\left(x_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$.*

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann existieren $c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$c \leq x_k \leq d \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \, .$$

Wir betrachten

$$M := \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} : x \leq x_k\} = \infty\} \, .$$

Die Menge M ist nicht leer und nach oben beschränkt, denn $c \in M$ und d ist eine obere Schranke von M. Also existiert $a := \sup M$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a + \varepsilon \notin M$, d.h.

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} : a + \varepsilon \leq x_k\} < \infty \, .$$

Außerdem existiert ein $x \in M$ mit $a - \varepsilon < x$. Dies impliziert

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < x_k\} = \infty \, .$$

Damit haben wir

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < x_k < a + \varepsilon\} = \infty \quad \text{für alle} \quad \varepsilon > 0 \, .$$

Also können wir wie folgt eine Teilfolge $\left(x_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konstruieren. Wir wählen $k_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$a - 1 < x_{k_1} < a + 1 \, .$$

Dann wählen wir $k_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$a - \frac{1}{2} < x_{k_2} < a + \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad k_2 > k_1 \, .$$

Sind $k_1, \ldots, k_j \in \mathbb{N}$ bereits gewählt, so wählen wir $k_{j+1} \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$a - \frac{1}{j+1} < x_{k_{j+1}} < a + \frac{1}{j+1} \quad \text{und} \quad k_{j+1} > k_j \, .$$

Auf diese Weise erhalten wir eine Teilfolge $\left(x_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$\left|x_{k_j} - a\right| < \frac{1}{j} \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N}$$

und folglich mit

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = a \, .$$

$\square$

3.6 Vollständige metrische Räume

Wir betrachten wieder einen metrischen Raum (X, d).

Definition 3.6.1 *Eine Folge (x_k) in X heißt* **Cauchy-Folge** *oder* **Fundamentalfolge** $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\, \forall k, l \geq k_0 : d(x_k, x_l) < \varepsilon\ .$$

Satz 3.6.2 *Sei (x_k) eine Folge in X. Ist (x_k) konvergent, so ist (x_k) eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Gelte $x_k \to a$ für $k \to \infty$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_k, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad k \geq k_0\ .$$

Mittels der Dreiecksungleichung (M3) folgt für alle $k, l \geq k_0$

$$d(x_k, x_l) \leq d(x_k, a) + d(x_l, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

Somit ist (x_k) eine Cauchy-Folge. □

Wie das folgende Beispiel zeigt, ist die Umkehrung von Satz 3.6.2 falsch.

Beispiel 3.6.3 Sei $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und sei $d_{\mathbb{R}^*}$ die von $d_{\mathbb{R}}$ induzierte Metrik auf $\mathbb{R}^*$. Die Folge $(1/k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}^*, d_{\mathbb{R}^*})$, denn

$$\left|\frac{1}{k} - \frac{1}{l}\right| \leq \frac{1}{k_0} \quad \text{für} \quad k, l \geq k_0\ .$$

Aber $(1/k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist in $(\mathbb{R}^*, d_{\mathbb{R}^*})$ nicht konvergent, d.h. es existiert kein $a \in \mathbb{R}^*$ mit $1/k \to a$ für $k \to \infty$. □

Definition 3.6.4 *Ein metrischer Raum (X, d) heißt* **vollständig** $:\Longleftrightarrow$ *Jede Cauchy-Folge in X ist konvergent.*

Die folgende Bemerkung ist für viele Anwendungen und Untersuchungen von wesentlicher Bedeutung.

Bemerkung 3.6.5 In einem vollständigen metrischen Raum kann man die Konvergenz einer Folge überprüfen, ohne ihren Grenzwert zu kennen. □

Beispiel 3.6.6 Der metrische Raum $(\mathbb{R}^*, d_{\mathbb{R}^*})$ ist nach Beispiel 3.6.3 nicht vollständig. □

Es gilt jedoch:

Satz 3.6.7 *Der metrische Raum $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ ist vollständig.*

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen, d.h.

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, k(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall k, l \geq k(\varepsilon) : |x_k - x_l| < \varepsilon\ . \tag{3.6.1}$$

Insbesondere ist

$$|x_k - x_l| < 1 \quad \text{für alle} \quad k, l \geq k(1)\ .$$

Indem man hier $l := k(1)$ setzt, erhält man

$$x_{k(1)} - 1 < x_k < x_{k(1)} + 1 \quad \text{für alle} \quad k \geq k(1)\ .$$

Folglich haben wir

$$\min\{x_1, \ldots, x_{k(1)-1}, x_{k(1)} - 1\} \leq x_k \leq \max\{x_1, \ldots, x_{k(1)-1}, x_{k(1)} + 1\} \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}\ .$$

Also ist die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Nach dem Satz von Bolzano–Weierstrass (Satz 3.5.3) existiert eine konvergente Teilfolge $\left(x_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Sei

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = a\ . \tag{3.6.2}$$

Wir zeigen, dass dann auch

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a\ . \tag{3.6.3}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen (3.6.1) gilt

$$|x_k - x_l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad k, l \geq k(\varepsilon/2)\ .$$

Außerdem existiert aufgrund von (3.6.2) ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|x_{k_j} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad j \geq j_0\ .$$

Ist also $k \geq k(\varepsilon/2)$ und ist $j \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $j \geq j_0$ und $k_j \geq k(\varepsilon/2)$, so haben wir

$$|x_k - a| \leq \left|x_k - x_{k_j}\right| + \left|x_{k_j} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

Somit gilt

$$|x_k - a| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \geq k(\varepsilon/2)\ .$$

Damit ist (3.6.3) gezeigt, und der Satz ist bewiesen. □

Indem wir Satz 3.6.7 umformulieren, erhalten wir

Satz 3.6.8 (Konvergenzkriterium von Cauchy) *Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn (3.6.1) gilt.* □

Bemerkung 3.6.9 Das Vollständigkeitsaxiom (A13) ist äquivalent zu:

> Es gelten das Konvergenzkriterium von Cauchy (Satz 3.6.8) und das Archimedische Axiom (Satz 2.4.1).

□

Satz 3.6.10 *Sind $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ vollständige metrische Räume, so ist auch deren Produkt (X, d) vollständig.*

Beweis. Seien $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ vollständige metrische Räume und sei $((x_{k1}, \ldots, x_{kn}))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ bezüglich der Produktmetrik d. Wegen

$$d_j(x_{kj}, x_{lj}) \leq d((x_{k1}, \ldots, x_{kn}), (x_{l1}, \ldots, x_{ln}))$$

ist dann auch $(x_{kj})_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ eine Cauchy-Folge. Da die (X_j, d_j) vollständig sind, existieren $a_j \in X_j$ mit

$$\lim_{k\to\infty} x_{kj} = a_j\ ,$$

woraus nach Satz 3.1.15

$$\lim_{k\to\infty} (x_{k1}, \ldots, x_{kn}) = (a_1, \ldots, a_n)$$

folgt. □

Folgerung 3.6.11 *Die metrischen Räume* $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ *und* $(\mathbb{C}^n, d_{\mathbb{C}^n})$ *sind vollständig.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus den Sätzen 3.6.7 und 3.6.10 und der Tatsache, dass $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}}) = \big(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2}\big)$. $\square$

Satz 3.6.12 *Sei* (X,d) *ein vollständiger metrischer Raum, sei* $A \subseteq X$ *und* $A \neq \emptyset$ *und bezeichne* d_A *die von* d *induzierte Metrik auf* A*. Dann ist der metrische Raum* (A, d_A) *genau dann vollständig, wenn* A *eine abgeschlossene Teilmenge von* X *ist.*

Beweis. ($\Longrightarrow$) Sei (A, d_A) vollständig und sei (x_k) eine Folge in A mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ für ein $x \in X$. Dann ist (x_k) eine Cauchy-Folge in (A, d_A). Also ist (x_k) in (A, d_A) konvergent und somit $x \in A$. Nach Satz 3.4.14 folgt, dass A eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

($\Longleftarrow$) Sei A eine abgeschlossene Teilmenge von X und sei (x_k) eine Cauchy-Folge in (A, d_A). Dann ist (x_k) auch eine Cauchy-Folge in (X, d) und somit gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ für ein $x \in X$. Da A abgeschlossen ist, folgt wieder nach Satz 3.4.14, dass $x \in A$. Folglich ist (x_k) in (A, d_A) konvergent. Damit ist gezeigt, dass (A, d_A) vollständig ist. $\square$

Folgerung 3.6.13 *Jede abgeschlossene Teilmenge* A *von* $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{C}^n$ *ist mit der von* $d_{\mathbb{R}^n}$ *bzw.* $d_{\mathbb{C}^n}$ *induzierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum.*

Beweis. Die Behauptung ist eine Konsequenz von Folgerung 3.6.11 und Satz 3.6.12. $\square$

Wir führen einen weiteren Begriff ein.

Definition 3.6.14 *Sei* (X,d) *ein metrischer Raum. Eine Abbildung* $f : X \to X$ *heißt* **kontrahierend** $:\Longleftrightarrow$ *Es existiert ein* $\alpha \in \,]0,1[$ *mit*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y) \quad \textit{für alle} \quad x, y \in X\,. \tag{3.6.4}$$

Der folgende Satz, benannt nach Stefan Banach (1892-1945), hat vielfältige Anwendungen, z.B. bei der Untersuchung der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Satz 3.6.15 (Banachscher Fixpunktsatz) *Sei* (X,d) *ein vollständiger metrischer Raum und sei* $f : X \to X$ *kontrahierend. Dann gilt:*

(i) f *hat genau einen Fixpunkt* $\hat{x}$*. Das heißt, es existiert genau ein* $\hat{x} \in X$ *mit* $f(\hat{x}) = \hat{x}$*.*

(ii) *Für jedes* $x_0 \in X$ *konvergiert die durch*

$$x_k := f(x_{k-1}) \quad \textit{für} \quad k \in \mathbb{N} \tag{3.6.5}$$

definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *gegen den Fixpunkt* $\hat{x}$*.*

Beweis. Sei $\alpha \in \,]0,1[$ derart, dass (3.6.4) gilt. Sei $x_0 \in X$ und sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die durch (3.6.5) definierte Folge in X. Wir zeigen, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, wobei wir o.B.d.A. annehmen, dass $f(x_0) \neq x_0$, d.h. $d(x_1, x_0) \neq 0$. Aus

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq \alpha\, d(x_k, x_{k-1}) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

erhält man

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \alpha^k\, d(x_1, x_0) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Dies liefert für $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k > l$

$$\begin{aligned} d(x_k, x_l) &\leq d(x_k, x_{k-1}) + d(x_{k-1}, x_{k-2}) + \cdots + d(x_{l+1}, x_l) \\ &\leq \left(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} + \cdots + \alpha^l\right) d(x_1, x_0) \\ &= \alpha^l \left(\alpha^{k-l-1} + \alpha^{k-l-2} + \cdots + 1\right) d(x_1, x_0) \;. \end{aligned}$$

Da

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha^j = \frac{1 - \alpha^{m+1}}{1 - \alpha} \;,$$

folgt

$$d(x_k, x_l) \leq \frac{\alpha^l \left(1 - \alpha^{k-l}\right)}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^l}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \quad \text{für} \quad k > l \;. \tag{3.6.6}$$

Außerdem existiert nach Folgerung 2.6.9(ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\alpha^{k_0} < \frac{1 - \alpha}{d(x_1, x_0)} \varepsilon$$

und somit mit

$$\alpha^l < \frac{1 - \alpha}{d(x_1, x_0)} \varepsilon \quad \text{für alle} \quad l \geq k_0 \;. \tag{3.6.7}$$

Die Abschätzungen (3.6.6) und (3.6.7) implizieren, dass

$$d(x_k, x_l) < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k, l \geq k_0 \;.$$

Also ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tatsächlich eine Cauchy-Folge

Da der metrische Raum (X, d) nach Voraussetzung vollständig ist, existiert ein $\hat{x} \in X$ mit $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = \hat{x}$. Wir behaupten, dass $f(\hat{x}) = \hat{x}$. Das schließen wir wie folgt. Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ gilt nach Dreiecksungleichung und aufgrund von (3.6.4)

$$\begin{aligned} d(f(\hat{x}), \hat{x}) &\leq d(f(\hat{x}), x_k) + d(x_k, \hat{x}) \\ &= d(f(\hat{x}), f(x_{k-1})) + d(x_k, \hat{x}) \\ &\leq \alpha\, d(\hat{x}, x_{k-1}) + d(x_k, \hat{x}) \;. \end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = \hat{x}$, haben wir außerdem

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, \hat{x}) = \lim_{k \to \infty} d(x_{k-1}, \hat{x}) = 0 \;.$$

Mit Satz 3.2.10 folgt

$$\begin{aligned} d(f(\hat{x}), \hat{x}) &\leq \lim_{k \to \infty} \left(\alpha\, d(\hat{x}, x_{k-1}) + d(x_k, \hat{x})\right) \\ &= \alpha \lim_{k \to \infty} d(\hat{x}, x_{k-1}) + \lim_{k \to \infty} d(x_k, \hat{x}) \\ &= 0 \;. \end{aligned}$$

Also ist $d(f(\hat{x}), \hat{x}) = 0$, d.h. $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

Wir müssen jetzt nur noch die Eindeutigkeit des Fixpunktes zeigen. Dazu nehmen wir an, dass $\hat{x}$ und $\hat{x}'$ Fixpunkte von f sind, d.h. es ist

$$f(\hat{x}) = \hat{x} \quad \text{und} \quad f(\hat{x}') = \hat{x}' \;.$$

Wegen (3.6.4) gilt dann

$$d(\hat{x}, \hat{x}') = d(f(\hat{x}), f(\hat{x}')) \leq \alpha\, d(\hat{x}, \hat{x}') \;,$$

was wegen $\alpha < 1$ sofort $d(\hat{x}, \hat{x}') = 0$, d.h. $\hat{x} = \hat{x}'$ liefert. $\square$

Wie das folgende Beispiel zeigt, kann der Banachsche Fixpunktsatz zur Bestimmung von Näherungslösungen von Gleichungen benutzt werden

Beispiel 3.6.16 Die Lösungen $a \in [0, +\infty[$ der Gleichung

$$a^3 - a = 1000 \tag{3.6.8}$$

sind genau die Fixpunkte von

$$f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[\ , \quad f(x) = \sqrt[3]{x + 1000}\ .$$

Die Abbildung f ist kontrahierend, denn für $x, y \in [0, +\infty[$ gilt

$$\begin{aligned} \left|\sqrt[3]{x+1000} - \sqrt[3]{y+1000}\right| &= \frac{|x-y|}{\sqrt[3]{x+1000}^2 + \sqrt[3]{x+1000}\sqrt[3]{y+1000} + \sqrt[3]{y+1000}^2} \\ &\leq \frac{1}{100}\,|x-y|\ . \end{aligned}$$

Außerdem ist $[0, +\infty[$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$, was nach Folgerung 3.6.13 impliziert, dass $[0, +\infty[$ mit der von $d_{\mathbb{R}}$ induzierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum ist. Also können wir auf f den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Insgesamt erhalten wir, dass die Gleichung (3.6.8) genau eine Lösung $a \in [0, +\infty[$ besitzt und dass für jedes $x_0 \in [0, +\infty[$ die durch (3.6.5) definierte Folge (x_k) gegen diese Lösung a konvergiert. □

3.7 Kompakte Mengen

Für die folgenden Überlegungen sei wieder ein metrischer Raum (X, d) fixiert.

Definition 3.7.1 *Eine Menge $M \subseteq X$ heißt* **beschränkt** $:\iff$

$$\exists\, a \in X\, \exists\, c \in \mathbb{R}_+\, \forall\, x \in M : d(x, a) \leq c\ .$$

Wie man leicht sieht, verallgemeinert diese Definition den Begriff einer beschränkten Menge von reellen Zahlen (vgl. Definition 2.1.10).

Satz 3.7.2 *Ist $M \subseteq X$ beschränkt, so gilt*

$$\forall\, a \in X\, \exists\, c \in \mathbb{R}_+\, \forall\, x \in M : d(x, a) \leq c\ .$$

Beweis. Sei $M \subseteq X$ beschränkt. Dann existieren ein $a_0 \in X$ und ein $c_0 \in \mathbb{R}_+$ mit

$$d(x, a_0) \leq c_0 \quad \text{für alle} \quad x \in M\ .$$

Ist nun $a \in M$ beliebig, so setzen wir $c := c_0 + d(a_0, a) \in \mathbb{R}_+$ und erhalten mit (M3)

$$d(x, a) \leq d(x, a_0) + d(a_0, a) \leq c_0 + d(a_0, a) = c \quad \text{für alle} \quad x \in M\ .$$

□

Definition 3.7.3 *Eine Menge $A \subseteq X$ heißt* **kompakt** $:\iff$ *Zu jeder Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A existieren eine Teilfolge $\left(x_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $a \in A$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j} = a$.*

Eine Menge $A \subseteq X$ ist also genau dann kompakt, wenn jede Folge in A eine in A konvergente Teilfolge besitzt.

Die nächsten beiden Sätze betreffen Eigenschaften von kompakten Mengen in beliebigen metrischen Räumen (X, d).

Satz 3.7.4 *Jede kompakte Teilmenge von X ist abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis. Sei $A \subseteq X$ kompakt. Mit Hilfe von Satz 3.4.14 verifizieren wir zunächst, dass A abgeschlossen ist. Sei also $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A und gelte

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \tag{3.7.1}$$

für ein $x \in X$. Da A kompakt ist, existieren eine Teilfolge $\left(x_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $a \in A$ mit

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = a\ . \tag{3.7.2}$$

Mittels der Sätze 3.1.12 und 3.5.2 folgt aus (3.7.1) und (3.7.2), dass $x = a$ und somit $x \in A$. Damit ist die Abgeschlossenheit von A gezeigt.

Dass A auch beschränkt ist, beweisen wir indirekt. Wir nehmen also an, dass A nicht beschränkt ist. Sei $y \in X$. Nach Annahme existiert kein $c \in \mathbb{R}_+$ mit

$$d(x,y) \le c \quad \text{für alle} \quad x \in A\ .$$

Dann gibt es eine Folge (x_k) in A mit

$$d(x_k,y) > k \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}\ .$$

Solch eine Folge (x_k) besitzt aber keine beschränkte Teilfolge, also nach Satz 3.1.14 auch keine konvergente Teilfolge. Damit haben wir einen Widerspruch zur Kompaktheit von A erhalten, und der Satz ist bewiesen. □

Satz 3.7.5 *Sei $A \subseteq X$ kompakt, sei $B \subseteq X$ abgeschlossen und gelte $B \subseteq A$. Dann ist auch B eine kompakte Teilmenge von X.*

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in B. Dann ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auch eine Folge in A. Da A kompakt ist, existieren eine Teilfolge $\left(x_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $a \in A$ mit

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = a\ .$$

Da B abgeschlossen ist, kann dies nach Satz 3.4.14 nur dann gelten, wenn $a \in B$. □

Für Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ gilt auch die Umkehrung von Satz 3.7.4, d.h. wir haben

Satz 3.7.6 (Satz von Heine–Borel) *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Aufgrund von Satz 3.7.4 genügt es zu zeigen, dass jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ kompakt ist. Wir beweisen das hier nur für Teilmengen von $\mathbb{R}$. Den allgemeinen Fall kann man analog behandeln.

Sei also $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt und sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A. Wir müssen zeigen, dass diese Folge eine Teilfolge besitzt, die gegen ein Element von A konvergiert. Da $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ als Folge in einer beschränkten Menge selbst beschränkt ist, existieren nach dem Satz von Bolzano–Weierstrass (Satz 3.5.3) eine Teilfolge $\left(x_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x\ .$$

Da A abgeschlossen ist, muss dann wieder $x \in A$ gelten. Damit ist der Satz bewiesen. □

Zum Schluss dieses Abschnitts geben wir eine Charakterisierung von kompakten Mengen in einem metrischen Raum (X,d) mittels Überdeckungen an.

Definition 3.7.7 *Ein Mengensystem* $\{U_j\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *heißt* **offene Überdeckung** *von* $A \subseteq X$ $:\Longleftrightarrow$

(i) $\forall\, j \in J : U_j \in \mathcal{O}(X,d)$,

(ii) $A \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$.

Satz 3.7.8 *Eine Menge* $A \subseteq X$ *ist genau dann kompakt, wenn aus jeder offenen Überdeckung* $\{U_j\}_{j\in J}$ *von* A *endlich viele Mengen* $U_{j_1}, \dots, U_{j_m}$ *so ausgewählt werden können, dass*

$$A \subseteq U_{j_1} \cup \cdots \cup U_{j_m}\ .$$

Beweis. Vgl. Jost: Postmodern Analysis, Theorem 7.38. □

3.8 Bestimmte Divergenz und Häufungswerte

Definition 3.8.1 *Sei* (x_k) *eine Folge reeller Zahlen.*

(i) *Die Folge* (x_k) **divergiert bestimmt gegen** $+\infty$ *(in Zeichen:* $\lim_{k\to\infty} x_k = +\infty$*)* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, c \in \mathbb{R}\, \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, k \geq k_0 : x_k > c\ .$$

(ii) *Die Folge* (x_k) **divergiert bestimmt gegen** $-\infty$ *(in Zeichen:* $\lim_{k\to\infty} x_k = -\infty$*)* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, d \in \mathbb{R}\, \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, k \geq k_0 : x_k < d\ .$$

Statt $\lim_{k\to\infty} x_k = \pm\infty$ werden wir auch

$$x_k \to \pm\infty \quad \text{für} \quad k \to \infty$$

schreiben.

Beispiel 3.8.2 Die Folgen $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $\left(a^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ für ein $a > 1$ divergieren bestimmt gegen $+\infty$. Die Folgen $\left(k + (-1)^k k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und $\left(a^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ für ein $a < -1$ sind weder konvergent noch bestimmt divergent. □

Im nächsten Satz sind Rechenregeln für bestimmt divergente Folgen von reellen Zahlen zusammengestellt. Dabei sind die Symbole $\pm$ bzw. $\mp$ so zu lesen, dass entweder überall das Vorzeichen oben oder überall das Vorzeichen unten zu nehmen ist.

Satz 3.8.3 *Seien* (x_k) *und* (y_k) *Folgen reeller Zahlen und sei* $a \in \mathbb{R}$*. Dann gilt:*

(i) $\lim_{k\to\infty} x_k = \pm\infty$ *und* $\lim_{k\to\infty} y_k = a \Longrightarrow \lim_{k\to\infty}(x_k + y_k) = \pm\infty$,

(ii) $\lim_{k\to\infty} x_k = \pm\infty,\ \lim_{k\to\infty} y_k = a$ *und* $a \neq 0 \Longrightarrow \lim_{k\to\infty}(x_k \cdot y_k) = \begin{cases} \pm\infty & \text{für } a > 0 \\ \mp\infty & \text{für } a < 0 \end{cases}$,

(iii) $\lim_{k\to\infty} x_k = \pm\infty$ *und* $\lim_{k\to\infty} y_k = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{k\to\infty}(x_k + y_k) = \pm\infty$ *und* $\lim_{k\to\infty}(x_k \cdot y_k) = +\infty$,

(iv) $\lim_{k\to\infty} x_k = +\infty$ *und* $\lim_{k\to\infty} y_k = -\infty \Longrightarrow \lim_{k\to\infty}(x_k \cdot y_k) = -\infty$.

Beweis. Übung. $\square$

Bemerkung 3.8.4 Aus $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$ und $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = -\infty$ kann man nicht auf das Konvergenzverhalten der Folge $(x_k + y_k)$ schließen. Genauso kann man i.allg. keine Aussagen zur Konvergenz von $(x_k \cdot y_k)$ treffen, wenn $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \pm\infty$ und $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = 0$. $\square$

Definition 3.8.5 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Ein $x \in X$ heißt* **Häufungswert** *der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$:$\iff$ Es existiert eine Teilfolge $\left(x_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j} = x$.*

Beispiel 3.8.6 Die Folge $\left((-1)^k + 1/k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ hat genau zwei Häufungswerte und zwar 1 und -1. Die Folge $\left(k + (-1)^k k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ hat 0 als einzigen Häufungswert. Die Folge $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt keinen Häufungswert. $\square$

Satz 3.8.7 *Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und sei $M \subseteq X$ die Menge der Häufungswerte dieser Folge. Dann ist M abgeschlossen.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $X \setminus M$ offen ist. Angenommen, das ist nicht der Fall. Dann gibt es ein $x \in X \setminus M$ mit

$$B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \quad \text{für alle} \quad \varepsilon > 0 \,.$$

Somit können wir für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein $y_j \in B_{1/j}(x) \cap M$ wählen. Da jedes y_j der Grenzwert einer Teilfolge von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist, existiert zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $k_j \in \mathbb{N}$ mit $d\left(y_j, x_{k_j}\right) < 1/j$. Mittels (M3) folgt

$$d\left(x, x_{k_j}\right) \leq d(x, y_j) + d\left(y_j, x_{k_j}\right) < \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j} \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N} \,.$$

Dies impliziert

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x \,.$$

Folglich ist $x \in M$. Da wir damit einen Widerspruch erhalten haben, muss M abgeschlossen sein. $\square$

Für die folgenden Überlegungen benötigen wir die so genannte **erweiterte Zahlengerade** $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Die Menge $\overline{\mathbb{R}}$ entsteht also dadurch, dass man zu $\mathbb{R}$ zwei weitere Elemente, bezeichnet mit $+\infty$ und $-\infty$, hinzufügt. Insbesondere sind $+\infty$ und $-\infty$ keine reellen Zahlen. Die Anordnung von $\mathbb{R}$ setzen wir auf $\overline{\mathbb{R}}$ fort, indem wir definieren, dass

$$-\infty < a < +\infty \quad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{R}$$

und

$$-\infty < +\infty \,.$$

Damit können wir den Begriff des Supremums und des Infimums auf nichtleere Mengen $M \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ übertragen. Dabei gilt $\sup M = +\infty$ genau dann, wenn $M \cap \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt ist oder $+\infty \in M$. Analog ist $\inf M = -\infty$ dann und nur dann, wenn $M \cap \mathbb{R}$ nicht nach unten beschränkt ist oder $-\infty \in M$.

Definition 3.8.8 *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die* **Limesmenge** *von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist*

$$\mathcal{L}\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) := \left\{ a \in \overline{\mathbb{R}} : \textit{es existiert eine Teilfolge } \left(x_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}} \textit{ mit } \lim_{j\to\infty} x_{k_j} = a \right\} \,.$$

Beispiel 3.8.9 Die Limesmenge der Folge $\left(k + (-1)^k k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist $\{0, +\infty\}$. $\square$

Satz 3.8.10 *Sei* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt:*

(i) $\mathcal{L}\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)\cap\mathbb{R}$ *ist die Menge aller Häufungswerte von* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(ii) $\mathcal{L}\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)\neq\emptyset$.

Beweis. (i) Das folgt sofort aus den Definitionen 3.8.5 und 3.8.8.

(ii) Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: (x_k) **ist beschränkt.** Nach dem Satz von Bolzano–Weierstrass (Satz 3.5.3) besitzt dann (x_k) einen Häufungswert und folglich ist $\mathcal{L}\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)\neq\emptyset$.

2. Fall: (x_k) **ist nicht nach oben beschränkt.** In diesem Fall gibt es zu jedem $j\in\mathbb{N}$ ein $k_j\in\mathbb{N}$ mit $x_{k_j}>k$. Somit existiert eine Teilfolge $\left(x_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty}x_{k_j}=+\infty$, d.h. $+\infty\in\mathcal{L}\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$.

3. Fall: (x_k) **ist nicht nach unten beschränkt.** Dann existiert zu jedem $j\in\mathbb{N}$ ein $k_j\in\mathbb{N}$ mit $x_{k_j}<-k$, woraus $-\infty\in\mathcal{L}\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$ folgt.

□

Definition 3.8.11 *Sei* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge reeller Zahlen. Der* **obere Limes** *oder* **limes superior** *von* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ist*

$$\limsup_{k\to\infty}x_k:=\sup\mathcal{L}\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)\ .$$

Der **untere Limes** *oder* **limes inferior** *von* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ist*

$$\liminf_{k\to\infty}x_k:=\inf\mathcal{L}\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)\ .$$

Beispiel 3.8.12 Die Limesmenge der Folge $\left(\mathrm{Re}\left(\mathrm{i}^k\right)(1+1/k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist $\{-1,0,1\}$. Folglich ist

$$\limsup_{k\to\infty}\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{i}^k\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)=1\quad\text{und}\quad\liminf_{k\to\infty}\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{i}^k\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)=-1\ .$$

□

Satz 3.8.13 *Ist* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge reeller Zahlen und ist* $a\in\overline{\mathbb{R}}$, *so gilt*

$$\lim_{k\to\infty}x_k=a\quad\Longleftrightarrow\quad\limsup_{k\to\infty}x_k=\liminf_{k\to\infty}x_k=a\ .$$

Beweis. Vgl. Walter: Analysis 1, Abschnitte 4.15 und 4.16. □

Satz 3.8.14 *Für jede Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *reeller Zahlen ist*

$$\limsup_{k\to\infty}x_k\in\mathcal{L}\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)\quad\textit{und}\quad\liminf_{k\to\infty}x_k\in\mathcal{L}\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)\ .$$

Beweis. Wir beweise die Aussage für den oberen Limes. Für den unteren Limes verfährt man analog.

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, sei $a:=\limsup\limits_{k\to\infty}x_k$ und sei M die Menge der Häufungswerte von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

1. Fall: $a \in \mathbb{R}$**.** Dann existiert eine Folge $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in M mit $\lim\limits_{j\to\infty} y_j = a$. Da M nach Satz 3.8.7 abgeschlossen ist, folgt mit Satz 3.4.14, dass $a \in M$ und somit $a \in \mathcal{L}\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$.

2. Fall: $a = +\infty$**.** Angenommen, es ist $+\infty \notin \mathcal{L}\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$. Dann existiert eine Folge $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in M mit $\lim\limits_{j\to\infty} y_j = +\infty$. Da die y_j Häufungswerte von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind, können wir zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $k_j \in \mathbb{N}$ mit $x_{k_j} > y_j - 1$ wählen. Für die so konstruierte Teilfolge von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt $\lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j} = +\infty$, was ein Widerspruch zu $+\infty \notin \mathcal{L}\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$ ist.

3. Fall: $a = -\infty$**.** Dann ist auch $\liminf\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$. Mit Satz 3.8.13 folgt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$ und somit $-\infty \in \mathcal{L}\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$.

$\square$

Kapitel 4

Reihen

4.1 Konvergenz von Reihen

Definition 4.1.1 (i) *Sei* $(z_k)_{k\geq m}$ *eine Folge in* $\mathbb{C}^n$ *(bzw.* $\mathbb{R}^n$*). Die Folge* $(s_i)_{i\geq m}$*, gegeben durch*

$$s_i := \sum_{k=m}^{i} z_k = z_m + z_{m+1} + \cdots + z_i \quad \textit{für} \quad i \geq m \ ,$$

wird **unendliche Reihe** *oder kurz* **Reihe** *in* $\mathbb{C}^n$ *(bzw.* $\mathbb{R}^n$*) mit den* **Gliedern** z_k *genannt und mit*

$$\sum_{k=m}^{\infty} z_k \quad \textit{oder} \quad z_m + z_{m+1} + z_{m+2} + \cdots$$

bezeichnet. Der Vektor s_i *heißt die* i**-te Partialsumme** *der Reihe.*

(ii) *Eine Reihe* $\sum\limits_{k=m}^{\infty} z_k$ *in* $\mathbb{C}^n$ *(bzw.* $\mathbb{R}^n$*) heißt* **konvergent** $:\Longleftrightarrow$ *Die Folge* $(s_i)_{i\geq m}$ *ihrer Partialsummen* s_i *ist konvergent. Andernfalls heißt* $\sum\limits_{k=m}^{\infty} z_k$ **divergent**. *Ist* $\sum\limits_{k=m}^{\infty} z_k$ *konvergent, so heißt der Grenzwert* s *der Folge* $(s_i)_{i\geq m}$ *der* **Wert** *oder die* **Reihensumme** *von* $\sum\limits_{k=m}^{\infty} z_k$ *und man schreibt*

$$\sum_{k=m}^{\infty} z_k = s \ .$$

(iii) *Eine Reihe* $\sum\limits_{k=m}^{\infty} z_k$ *in* $\mathbb{C}^n$ *(bzw.* $\mathbb{R}^n$*) heißt* **absolut konvergent** $:\Longleftrightarrow$ *Die Reihe* $\sum\limits_{k=m}^{\infty} \|z_k\|$ *ist konvergent.*

Das Symbol $\sum\limits_{k=m}^{\infty} z_k$ bezeichnet also zunächst die Folge $(s_i)_{i\geq m}$ der Partialsummen, unabhängig davon, ob diese Folge konvergent oder divergent ist. In dem Fall, dass $(s_i)_{i\geq m}$ konvergent ist, bezeichnet $\sum\limits_{k=m}^{\infty} z_k$ auch den Grenzwert dieser Folge.

Ist $(x_k)_{k\geq m}$ eine Folge reeller Zahlen, so schreiben wir

$$\sum_{k=m}^{\infty} x_k = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=m}^{\infty} x_k = -\infty \ ,$$

falls die Folge der Partialsummen von $\sum\limits_{k=m}^{\infty} x_k$ bestimmt gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ divergiert. Sind alle x_k nichtnegativ, so bedeutet

$$\sum_{k=m}^{\infty} x_k < +\infty ,$$

dass $\sum\limits_{k=m}^{\infty} x_k$ konvergent ist.

Beispiel 4.1.2 (Geometrische Reihe) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} ,$$

denn nach Beispiel 3.2.5 gilt

$$s_i = 1 + z + z^2 + \cdots + z^i = \frac{1-z^{i+1}}{1-z} \to \frac{1}{1-z} \quad \text{für} \quad i \to \infty .$$

Dagegen ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$ divergent. □

In den folgenden Sätzen und Definitionen betrachten wir o.B.d.A. Reihen der Form $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$.

Satz 4.1.3 *Seien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ konvergente Reihen in $\mathbb{C}^n$ und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda z_k + \mu w_k)$ konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda z_k + \mu w_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} z_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} w_k .$$

Beweis. Man wende Satz 3.2.7 auf die Folgen der Partialsummen von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ an. □

Satz 4.1.4 *Seien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ konvergente Reihen reeller Zahlen und gelte $x_k \leq y_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} y_k .$$

Beweis. Man wende Satz 3.2.10 auf die Folgen der Partialsummen von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ an. □

Der nächste Satz wird manchmal **Teleskop-Prinzip** genannt.

Satz 4.1.5 *Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}^n$. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (z_k - z_{k+1})$ ist genau dann konvergent, wenn die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. In diesem Fall ist*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - z_{k+1}) = z_1 - \lim_{k\to\infty} z_k .$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus

$$s_i = (z_1 - z_2) + (z_2 - z_3) + (z_3 - z_4) + \cdots + (z_i - z_{i+1}) = z_1 - z_{i+1} .$$

□

Beispiel 4.1.6 Es ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = +\infty .$$

Dies ergibt sich mit Satz 4.1.5 aus

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = -\sqrt{k} + \sqrt{k+1} .$$

□

Wir wollen zeigen, dass eine absolut konvergente Reihe auch konvergent ist. Dafür benutzen wir

Satz 4.1.7 (Konvergenzkriterium von Cauchy) *Eine Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *in* $\mathbb{C}^n$ *ist genau dann konvergent, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists i_0 \in \mathbb{N} \, \forall j \geq i \geq i_0 : \|z_i + z_{i+1} + \cdots + z_j\| < \varepsilon . \tag{4.1.1}$$

Beweis. Die Bedingung (4.1.1) besagt, dass die Folge $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ eine Cauchy-Folge ist. Da $\mathbb{C}^n$ nach Folgerung 3.6.11 vollständig ist, folgt sofort die Behauptung. □

Satz 4.1.8 *Ist eine Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *in* $\mathbb{C}^n$ *absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.*

Beweis. Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut konvergent. Dann existiert nach Satz 4.1.7 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|z_i\| + \|z_{i+1}\| + \cdots + \|z_j\| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad j \geq i \geq i_0 .$$

Da nach der Dreiecksungleichung für die Norm in $\mathbb{C}^n$

$$\|z_i + z_{i+1} + \cdots + z_j\| \leq \|z_i\| + \|z_{i+1}\| + \cdots + \|z_j\| ,$$

folgt (4.1.1) und somit die Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$. □

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass die Umkehrung von Satz 4.1.8 nicht gilt.

Wir beenden diesen Abschnitt mit folgender Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung.

Satz 4.1.9 *Für jede absolut konvergente Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *in* $\mathbb{C}^n$ *gilt*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} z_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\| . \tag{4.1.2}$$

Beweis. Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut konvergent. Dann gilt

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{i} \|z_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\| \ . \tag{4.1.3}$$

Nach Satz 4.1.8 und Satz 3.2.7(iii) gilt auch

$$\lim_{i\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{i} z_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} z_k \right\| \ . \tag{4.1.4}$$

Aus (4.1.3), (4.1.4) und

$$\left\| \sum_{k=1}^{i} z_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{i} \|z_k\| \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N}$$

folgt mit Satz 3.2.10 die Ungleichung (4.1.2). □

4.2 Konvergenzkriterien für Reihen

Im letzten Abschnitt haben wir bereits ein Konvergenzkriterium für Reihen kennengelernt, nämlich das Cauchy-Kriterium. Aus diesem kann man ein nützliches notwendiges Kriterium für die Konvergenz von Reihen schlussfolgern.

Satz 4.2.1 *Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{C}^n$, so ist $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

Beweis. Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergent. Nach Satz 4.1.7 ist das zu (4.1.1) äquivalent. Setzt man dort $j = i$, so erhält man

$$\forall\, \varepsilon > 0 \, \exists\, i_0 \in \mathbb{N} \, \forall\, i \geq i_0 : \|z_i\| < \varepsilon \ ,$$

was gerade $\lim\limits_{i\to\infty} z_i = 0$ bedeutet. □

Bemerkung 4.2.2 Die Umkehrung von Satz 4.2.1 gilt nicht. Zum Beispiel ist (vgl. Beispiel 4.1.6)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = +\infty \ ,$$

obwohl

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 0 \ .$$

□

Als Nächstes geben wir Kriterien für die Konvergenz bzw. Divergenz von Reihen nichtnegativer reeller Zahlen an.

Satz 4.2.3 *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ genau dann konvergent, wenn die Folge $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ihrer Partialsummen nach oben beschränkt ist.*

Beweis. ($\Longrightarrow$) Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergent, d.h. $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. Dann ist $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nach Satz 3.1.14 beschränkt, also insbesondere nach oben beschränkt.

($\Longleftarrow$) Wegen $x_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Die gewünschte Aussage folgt somit aus Satz 3.3.3(i). $\square$

Bemerkung 4.2.4 Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen und ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ divergent, so gilt offensichtlich $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = +\infty$. $\square$

Satz 4.2.5 (Majorantenkriterium für Konvergenz) *Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit*

$$0 \leq x_k \leq y_k \quad \textit{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \,. \tag{4.2.1}$$

Ist dann $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ konvergent, so ist auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergent.

Beweis. Seien $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die Folgen der Partialsummen von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ bzw. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ und sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ konvergent. Dann ist $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nach Satz 4.2.3 nach oben beschränkt. Da wegen (4.2.1)

$$s_i \leq t_i \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N} \,,$$

ist folglich auch $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, was wiederum mit Satz 4.2.3 die Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ impliziert. $\square$

Satz 4.2.6 (Minorantenkriterium für Divergenz) *Es gelten dieselben Voraussetzungen wie in Satz 4.2.5. Ist dann $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ divergent, so ist auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ divergent.*

Beweis. Die Behauptung erhält man durch Kontraposition aus Satz 4.2.5. $\square$

Erfüllen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Bedingung (4.2.1), so heißt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ **Majorante** von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ **Minorante** von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$.

Als Anwendung der Sätze 4.2.5 und 4.2.6 haben wir:

Beispiel 4.2.7 Es ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty \,,$$

denn

$$0 \leq \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

und (vgl. Beispiel 4.1.6)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} < +\infty \,.$$

Dagegen ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty \,,$$

denn

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \le \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

und (vgl. wieder Beispiel 4.1.6)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = +\infty \ .$$

□

Satz 4.2.8 (Verdichtungssatz von Cauchy) *Sei* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Dann ist die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *genau dann konvergent, wenn die Reihe* $\sum\limits_{l=0}^{\infty} 2^l x_{2^l}$ *konvergent ist.*

Beweis. Wir bezeichnen die Partialsummen von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ mit s_i und die von $\sum\limits_{l=0}^{\infty} 2^l x_{2^l}$ mit t_j.

($\Longleftarrow$) Sei $\sum\limits_{l=0}^{\infty} 2^l x_{2^l}$ konvergent. Das ist nach Satz 4.2.3 dazu äquivalent, dass die Folge $(t_j)_{j\ge 0}$ nach oben beschränkt ist. Da für $i < 2^{j+1}$

$$\begin{aligned}
s_i &\le s_{2^{j+1}-1} \\
&= x_1 + (x_2+x_3) + (x_4+\cdots+x_7) + \cdots + (x_{2^j}+\cdots+x_{2^{j+1}-1}) \\
&\le x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_4 + \cdots + 2^j\,x_{2^j} \\
&= t_j \ ,
\end{aligned}$$

ist dann auch die Folge $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und somit die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergent.

($\Longrightarrow$) Sei $\sum\limits_{l=0}^{\infty} 2^l x_{2^l}$ divergent, d.h. $\lim\limits_{j\to\infty} t_j = +\infty$. Da für $i \ge 2^{j+1}$

$$\begin{aligned}
s_i &\ge s_{2^{j+1}} \\
&= x_1 + x_2 + (x_3+x_4) + (x_5+\cdots+x_8) + \cdots + (x_{2^j+1}+\cdots+x_{2^{j+1}}) \\
&\ge \frac{1}{2}\,x_1 + x_2 + 2\,x_4 + 4\,x_8 + \cdots + 2^j\,x_{2^{j+1}} \\
&= \frac{1}{2}\,t_{j+1} \ ,
\end{aligned}$$

gilt dann auch $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = +\infty$, d.h. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ ist divergent. □

Beispiel 4.2.9 Mit Hilfe von Satz 4.2.8 können wir das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-q}$ mit $q \in \mathbb{Q}_+$ bestimmen. Die verdichtete Reihe ist in diesem Fall

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^l \cdot 2^{-lq} = \sum_{l=0}^{\infty} 2^{(1-q)l} \ .$$

Diese Reihe ist nach Beispiel 4.1.2 genau dann konvergent, wenn $2^{(1-q)} < 1$, d.h. wenn $q > 1$. Folglich ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-q}$ für $q > 1$ konvergent und für $0 < q \le 1$ divergent. Insbesondere ist die so genannte **harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

divergent. □

Der nächste Satz liefert ein Konvergenzkriterium für alternierende Reihen.

Satz 4.2.10 (Konvergenzkriterium von Leibniz) *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge von reellen Zahlen. Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k x_k$ konvergent.*

Beweis. Seien s_i die Partialsummen von $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k x_k$. Dann ist die Folge $(s_{2j-1})_{j\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und die Folge $(s_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, denn für $j\in\mathbb{N}$ ist

$$s_{2j+1}-s_{2j-1} = -x_{2j+1}+x_{2j}\geq 0 \quad \text{und} \quad s_{sj+2}-s_{2j} = x_{2j+2}-x_{2j+1}\leq 0\ .$$

Desweiteren ist $(s_{2j-1})_{j\in\mathbb{N}}$ nach oben und $(s_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, denn für $j\in\mathbb{N}$ gilt

$$s_{2j-1}\leq s_{2j} = (x_{2j}-x_{2j-1})+\cdots+(x_4-x_3)+(x_2-x_1)\leq 0$$

und

$$s_{2j}\geq s_{2j-1} = -x_1+(x_2-x_3)+(x_4-x_5)+\cdots+(x_{2j-2}-x_{2j-1})\geq -x_1\ .$$

Also sind die Folgen $(s_{2j-1})_{j\in\mathbb{N}}$ und $(s_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$ nach Satz 3.3.3 konvergent. Wegen

$$s_{2j}-s_{2j-1} = x_{2j} \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} x_k = 0$$

haben wir außerdem

$$\lim_{j\to\infty} s_{2j-1} = \lim_{j\to\infty} s_{2j}\ .$$

Folglich ist die Folge $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und somit die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k x_k$ konvergent. □

Wir können jetzt ein Beispiel für eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergent ist, angeben.

Beispiel 4.2.11 Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots$$

ist nach Satz 4.2.10 konvergent. Sie ist aber nicht absolut konvergent, denn nach Beispiel 4.2.9 gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty\ .$$

□

Durch Vergleich mit der geometrischen Reihe erhält man die folgenden Kriterien für absolute Konvergenz.

Satz 4.2.12 (Wurzelkriterium) *Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}^n$. Dann gilt:*

(i) *Ist $\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\|z_k\|}<1$, so ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut konvergent.*

(ii) *Ist $\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\|z_k\|}>1$, so ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ divergent.*

Beweis. (i) Sei $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|z_k\|} < 1$ und sei $a \in \mathbb{R}$ mit $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|z_k\|} < a < 1$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[k]{\|z_k\|} \le a\ , \quad \text{d.h.} \quad \|z_k\| \le a^k \quad \text{für alle} \quad k \ge m\ .$$

Da $\sum_{k=m}^{\infty} a^k$ nach Beispiel 4.1.2 konvergent ist, folgt mit dem Majorantenkriterium (Satz 4.2.5), dass auch $\sum_{k=m}^{\infty} \|z_k\|$, also auch $\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\|$ konvergent ist.

(ii) Sei $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|z_k\|} > 1$. Dann existiert eine Teilfolge $\left(z_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ von $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\sqrt[k]{\left\|z_{k_j}\right\|} > 1\ , \quad \text{d.h.} \quad \left\|z_{k_j}\right\| > 1 \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N}\ .$$

Also ist $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, woraus mit Satz 4.2.1 folgt, dass $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ divergent ist. □

Satz 4.2.13 (Quotientenkriterium) *Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}^n$ und sei $z_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(i) *Ist $\limsup_{k\to\infty} \|z_{k+1}\|/\|z_k\| < 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut konvergent.*

(ii) *Ist $\liminf_{k\to\infty} \|z_{k+1}\|/\|z_k\| > 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ divergent.*

Beweis. (i) Sei $\limsup_{k\to\infty} \|z_{k+1}\|/\|z_k\| < 1$ und sei $a \in \mathbb{R}$ mit $\limsup_{k\to\infty} \|z_{k+1}\|/\|z_k\| < a < 1$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{\|z_{k+1}\|}{\|z_k\|} \le a \quad \text{für alle} \quad k \ge m\ .$$

Damit folgt

$$\|z_k\| \le a\,\|z_{k-1}\| \le a^2\,\|z_{k-2}\| \le \cdots \le a^{k-m}\,\|z_m\| \quad \text{für alle} \quad k \ge m\ .$$

Da $\sum_{k=m}^{\infty} a^{k-m}\|z_m\| = \sum_{k=m}^{\infty} a^{-m}\|z_m\|\,a^k$ nach Satz 4.1.3 und Beispiel 4.1.2 konvergent ist, folgt mit dem Majorantenkriterium, dass $\sum_{k=m}^{\infty} \|z_k\|$ und somit auch $\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\|$ konvergent ist.

(ii) Sei $\liminf_{k\to\infty} \|z_{k+1}\|/\|z_k\| > 1$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{\|z_{k+1}\|}{\|z_k\|} \ge 1 \quad \text{für alle} \quad k \ge m\ .$$

Damit haben wir

$$\|z_k\| \ge \|z_m\| > 0 \quad \text{für alle} \quad k \ge m\ .$$

Also ist $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, was mit Satz 4.2.1 die Behauptung liefert. □

Bemerkung 4.2.14 Aus $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|z_k\|} = 1$ bzw. $\limsup_{k\to\infty} \|z_{k+1}\|/\|z_k\| = 1$ kann man weder auf Konvergenz noch auf Divergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ schließen. Ist z.B. $z_k = k^{-q}$ für ein $q \in \mathbb{Q}_+$, so gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|z_k\|} = \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right)^q = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right)^q = 1$$

und

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\|z_{k+1}\|}{\|z_k\|} = \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^q = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^q = 1 \, .$$

Aber nach Beispiel 4.2.9 ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-q}$ nur für $q > 1$ konvergent. $\square$

Beispiel 4.2.15 (i) Sei $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^{k^2}$ ist nach Wurzelkriterium für $|z| < 1$ konvergent und für $|z| > 1$ divergent, denn für $k \to \infty$ gilt

$$\sqrt[k]{\left|z^{k^2}\right|} = |z|^k \to \begin{cases} 0 & \text{, falls} \quad |z| < 1 \\ 1 & \text{, falls} \quad |z| = 1 \\ +\infty & \text{, falls} \quad |z| > 1 \end{cases} \qquad \text{für} \quad k \to \infty \, .$$

(ii) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k k!\, k^{-k}$ ist nach dem Quotientenkriterium konvergent, denn

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}(k+1)!\,(k+1)^{-(k+1)}}{2^k k!\, k^{-k}} = \lim_{k\to\infty} 2\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} = \frac{2}{\mathrm{e}} < 1 \, .$$

Dagegen ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 3^k k!\, k^{-k}$ divergent, denn

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{3^{k+1}(k+1)!\,(k+1)^{-(k+1)}}{3^k k!\, k^{-k}} = \lim_{k\to\infty} 3\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} = \frac{3}{\mathrm{e}} > 1 \, .$$

Dabei haben wir benutzt, dass $2 < \mathrm{e} < 3$ (vgl. Bemerkung 3.3.6(i)).

$\square$

Zum Schluss dieses Abschnitts soll kurz die so genannte g-Bruchentwicklung reeller Zahlen behandelt werden.

Definition 4.2.16 *Sei $g \in \mathbb{N}$ und sei $g \geq 2$. Eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\, g^{-k}$ heißt **g-Bruchentwicklung** und wird dann mit $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ bezeichnet* $:\Longleftrightarrow$

(i) *Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $a_k \in \{0, 1, \dots, g-1\}$.*

(ii) *Es gilt nicht, dass $a_k = g - 1$ für fast alle k.*

Im Fall $g = 2$ spricht man auch von einer **Dualbruchentwicklung**, *im Fall $g = 10$ von einer* **Dezimalbruchentwicklung**

Jede g-Bruchentwicklung $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\, g^{-k}$ ist wegen

$$0 \leq \frac{a_k}{g^k} \leq \frac{g-1}{g^k} \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

nach dem Majorantenkriterium konvergent. Der Grund für die Bedingung (ii) von Definition 4.2.16 ist die Vermeidung von Mehrdeutigkeiten. Solche würden sonst dadurch entstehen, dass

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{g-1}{g^k} = \frac{g-1}{g^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{g^k} = \frac{g-1}{g^m} \, \frac{1}{1-g^{-1}} = \frac{1}{g^{m-1}} \, .$$

Satz 4.2.17 *Zu jeder reellen Zahl $x \in [0,1[$ existiert genau eine g-Bruchentwicklung mit Reihensumme x.*

Beweis. Übung. $\square$

Mittels Satz 4.2.17 können wir zeigen, dass $\mathbb{R}$ tatsächlich überabzählbar ist.

Beweis von Satz 2.5.5. Aus Satz 4.2.17 mit $g = 2$ und Satz 2.5.6 erhalten wir, dass das Intervall $[0,1[$ überabzählbar ist. Folglich ist auch $\mathbb{R}$ überabzählbar. $\square$

4.3 Summierbare Familien und Cauchy-Produkt

Definition 4.3.1 *Eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ wird* **Umordnung** *der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ genannt $:\Longleftrightarrow$ Es existiert eine bijektive Abbildung $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $w_k = z_{\psi(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Wie das folgende Beispiel zeigt, darf man Reihen nicht bedenkenlos umordnen.

Beispiel 4.3.2 Die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$$

ist offensichtlich konvergent. Deren Umordnung

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$$

ist aber divergent, denn für die $3l$-ten Partialsummen $\hat{s}_{3l}$ der letzten Reihe gilt

$$\hat{s}_{3l} = \frac{1}{\sqrt{l+1}} + \frac{1}{\sqrt{l+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2l}} \geq \frac{l}{\sqrt{2l}} = \sqrt{\frac{l}{2}}\,.$$

$\square$

In diesem Abschnitt wollen wir u.a. der Frage nachgehen, unter welchen Bedingungen man konvergente Reihen umordnen kann, ohne die Reihensumme zu verändern. Dazu wählen wir eine etwas allgemeinere Herangehensweise.

Seien A und M beliebige nichtleere Mengen.

Definition 4.3.3 *Eine* **Familie** *in M mit Indexmenge A ist eine Abbildung $\varphi : A \to M$.*

Insbesondere ist eine Familie mit Indexmenge $\mathbb{N}$ eine Folge. Wie bei $A = \mathbb{N}$ werden wir Familien $\varphi : A \to M$ in der Form $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ schreiben, wobei $x_\alpha = \varphi(\alpha)$ für $\alpha \in A$.

Bezeichne $\mathcal{E}(A)$ das Mengensystem aller endlichen Teilmengen von A, also

$$\mathcal{E}(A) := \{I \subseteq A : \operatorname{card} I < \infty\}\,.$$

Ist $(z_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie in $\mathbb{C}^n$ und ist $I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \in \mathcal{E}(A)$, so setzen wir

$$\sum_{\alpha \in I} z_\alpha := \sum_{k=1}^{m} z_{\alpha_k} \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha \in I} \|z_\alpha\| := \sum_{k=1}^{m} \|z_{\alpha_k}\|\,.$$

Definition 4.3.4 *Eine Familie* $(z_\alpha)_{\alpha\in A}$ *in* $\mathbb{C}^n$ *heißt* **summierbar** $:\iff$ *Die Menge*

$$\mathcal{S}\left((z_\alpha)_{\alpha\in A}\right) := \left\{\sum_{\alpha\in I}\|z_\alpha\| : I \in \mathcal{E}(A)\right\}$$

ist nach oben beschränkt.

Lemma 4.3.5 *Eine Folge* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C}^n$ *ist genau dann summierbar, wenn die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *absolut konvergent ist.*

Beweis. Sei $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen von $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|z_k\|$. Ist $I \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$ und ist $m = \max I$, so gilt

$$\sum_{k\in I}\|z_k\| \le \sum_{k=1}^{m} z_k = s_m\ .$$

Folglich ist die Menge $\mathcal{S}\left((z_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$ genau dann nach oben beschränkt, wenn die Folge $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist, und das ist nach Satz 4.2.3 zu $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|z_k\| < +\infty$ äquivalent. $\square$

Beispiel 4.3.6 Die Familie $\left(k^{-2}\,l^{-2}\right)_{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ ist summierbar. Ist nämlich $I \in \mathcal{E}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, so können wir $i, j \in \mathbb{N}$ so wählen, dass

$$I \subseteq \{1,\dots,i\} \times \{1,\dots,j\}\ .$$

Damit erhalten wir die Abschätzung

$$\sum_{(k,l)\in I}\frac{1}{k^2\,l^2} \le \sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{k^2\,l^2} = \left(\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k^2}\right)\left(\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{l^2}\right) \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}\right)\ .$$

$\square$

Definition 4.3.7 *Sei* $(z_\alpha)_{\alpha\in A}$ *eine Familie in* $\mathbb{C}^n$*. Ein Vektor* $s \in \mathbb{C}^n$ *heißt* **Summe** *von* $(z_\alpha)_{\alpha\in A}$ *und wird dann mit* $\sum\limits_{\alpha\in A} z_\alpha$ *bezeichnet* $:\iff$ *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert eine Menge* $I_0 \in \mathcal{E}(A)$ *derart, dass*

$$\left\|s - \sum_{\alpha\in J} z_\alpha\right\| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad J \in \mathcal{E}(A) \quad \textit{mit} \quad I_0 \subseteq J\ .$$

Lemma 4.3.8 *Jede Familie* $(z_\alpha)_{\alpha\in A}$ *besitzt höchstens eine Summe.*

Beweis. Angenommen, s und s' sind Summen von $(z_\alpha)_{\alpha\in A}$ und $s \ne s'$. Dann ist $\|s - s'\| > 0$ und es existieren $I_0, I_0' \in \mathcal{E}(A)$ derart, dass

$$\left\|s - \sum_{\alpha\in J} z_\alpha\right\| < \frac{\|s-s'\|}{2} \quad \text{für alle} \quad J \in \mathcal{E}(A) \quad \text{mit} \quad I_0 \subseteq J$$

und

$$\left\|s' - \sum_{\alpha\in J} z_\alpha\right\| < \frac{\|s-s'\|}{2} \quad \text{für alle} \quad J \in \mathcal{E}(A) \quad \text{mit} \quad I_0' \subseteq J\ .$$

Wir setzen $J_0 := I_0 \cup I_0'$ und erhalten den Widerspruch

$$\|s-s'\| \le \left\|s - \sum_{\alpha\in J_0} z_\alpha\right\| + \left\|s' - \sum_{\alpha\in J_0} z_\alpha\right\| < \frac{\|s-s'\|}{2} + \frac{\|s-s'\|}{2} = \|s-s'\|\ .$$

$\square$

Lemma 4.3.9 *Eine summierbare Folge* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C}^n$ *hat den Wert der Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *als Summe.*

Beweis. Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine summierbare Folge in $\mathbb{C}^n$ und sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ nach Lemma 4.3.5 absolut konvergent ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\| - \sum_{k=1}^{m} \|z_k\| < \varepsilon\ , \quad \text{d.h.} \quad \sum_{k=m+1}^{\infty} \|z_k\| < \varepsilon\ .$$

Setzen wir $I_0 := \{1, \ldots, m\}$, so folgt unter Benutzung von Satz 4.1.9, dass

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} z_k - \sum_{k\in J} z_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|z_k\| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad J \in \mathcal{E}(\mathbb{N}) \quad \text{mit} \quad I_0 \subseteq J\ .$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Allgemein gilt:

Satz 4.3.10 *Jede summierbare Familie in* $\mathbb{C}^n$ *besitzt eine Summe.*

Beweis. Vgl. Königsberger: Analysis 1, Abschnitt 6.3. □

Jetzt können wir uns der Frage zuwenden, wann man Reihen unter Beibehaltung der Reihensumme umordnen kann. Wir stellen fest:

Lemma 4.3.11 *Sei* $(z_\alpha)_{\alpha\in A}$ *eine Familie in* $\mathbb{C}^n$ *und sei* $\psi : A \to A$ *bijektiv. Dann ist* $\left(z_{\psi(\alpha)}\right)_{\alpha\in A}$ *genau dann summierbar, wenn* $(z_\alpha)_{\alpha\in A}$ *summierbar ist, und in diesem Fall gilt*

$$\sum_{\alpha\in A} z_{\psi(\alpha)} = \sum_{\alpha\in A} z_\alpha\ .$$

Beweis. Das ist offensichtlich. □

Satz 4.3.12 (Umordnungssatz) *Jede Umordnung* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ *einer absolut konvergenten Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *in* $\mathbb{C}^n$ *ist ebenfalls absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_k\ .$$

Beweis. Das ist eine Konsequenz der Lemmata 4.3.5, 4.3.9 und 4.3.11. □

Bemerkenswerterweise gilt:

Satz 4.3.13 (Riemannscher Umordnungssatz) *Ist* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen, so existiert zu jedem* $s \in \overline{\mathbb{R}}$ *eine Umordnung* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ *von* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k = s\ .$$

Beweis. Vgl. Walter: Analysis 1, Abschnitt 5.17. □

Wir illustrieren die Aussage des letzten Satzes an folgendem Beispiel.

Beispiel 4.3.14 Sei s die Reihensumme von $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^{-1}$. Dann ist auch

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=s \tag{4.3.1}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k}\right)=s\ . \tag{4.3.2}$$

Indem wir (4.3.1) mit 1/2 multipizieren und zu (4.3.2) addieren, erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{3s}{2}\ . \tag{4.3.3}$$

Nun betrachten wir die Reihe

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots\ . \tag{4.3.4}$$

Diese Reihe, die eine Umordnung der Ausgangsreihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^{-1}$ ist, ist konvergent und hat $3s/2$ als Reihensumme. Das sehen wir folgendermaßen. Seien t_i die Partialsummen von (4.3.4). Aufgrund von (4.3.3) haben wir

$$\lim_{j\to\infty} t_{3j}=\frac{3s}{2}\ .$$

Da

$$t_{3j+1}=t_{3j}+\frac{1}{4j-3}\quad\text{und}\quad t_{3j+2}=t_{3j}+\frac{1}{4j-3}+\frac{1}{4j-1}\ ,$$

ist dann auch

$$\lim_{j\to\infty} t_{3j+1}=\lim_{j\to\infty} t_{3j+2}=\frac{3s}{2}\ .$$

Also gilt tatsächlich

$$\lim_{i\to\infty} t_i=\frac{3s}{2}\ .$$

□

Für den nächsten Satz benötigen wir den folgenden Begriff.

Definition 4.3.15 *Eine* **Zerlegung** *einer nichtleeren Menge A ist ein Mengensystem $\{A_\beta\}_{\beta\in B}$ mit*

(i) *$A_\beta\subseteq A$ und $A_\beta\neq\emptyset$ für alle $\beta\in B$,*

(ii) *$A_{\beta_1}\cap A_{\beta_2}=\emptyset$ für $\beta_1\neq\beta_2$,*

(iii) *$\bigcup_{\beta\in B}A_\beta=A$.*

Satz 4.3.16 (Großer Umordnungssatz) *Sei $(z_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine summierbare Familie in $\mathbb{C}^n$ und sei $\{A_\beta\}_{\beta\in B}$ eine Zerlegung von A. Dann gilt:*

(i) *Für jedes* $\beta \in B$ *ist die Familie* $(z_\alpha)_{\alpha \in A_\beta}$ *summierbar.*

(ii) *Die Familie* $(s_\beta)_{\beta \in B}$ *der Summen* $s_\beta := \sum_{\alpha \in A_\beta} z_\alpha$ *ist summierbar und*

$$\sum_{\alpha \in A} z_\alpha = \sum_{\beta \in B} s_\beta \,.$$

Beweis. Vgl. Königsberger: Analysis 1, Abschnitt 6.3. $\square$

Eine einfache Folgerung aus dem letzten Satz ist:

Satz 4.3.17 (Doppelreihensatz) *Ist* $(z_{kl})_{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ *eine summierbare Familie in* $\mathbb{C}^n$*, so gilt:*

(i) *Die Reihen* $\sum_{l=1}^{\infty} z_{il}$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} z_{kj}$ *sind für alle* $i, j \in \mathbb{N}$ *absolut konvergent.*

(ii) *Die Reihen* $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} z_{kl} \right)$ *und* $\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} z_{kl} \right)$ *sind absolut konvergent und*

$$\sum_{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} z_{kl} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} z_{kl} \right) = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} z_{kl} \right)$$

Beweis. Man wende Satz 4.3.16 auf die Zerlegungen $\{\{k\} \times \mathbb{N}\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{\mathbb{N} \times \{l\}\}_{l \in \mathbb{N}}$ von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an. $\square$

Doppelreihen entstehen insbesondere bei der Multiplikation von Reihen komplexer Zahlen. Das wollen wir jetzt etwas genauer betrachten.

Definition 4.3.18 *Seien* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *und* $\sum_{l=0}^{\infty} w_l$ *Reihen komplexer Zahlen. Dann heißt die Reihe*

$$\sum_{m=0}^{\infty} v_m \quad \textit{mit} \quad v_m := \sum_{i=0}^{m} z_i w_{m-i}$$

Cauchy-Produkt *der Reihen* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *und* $\sum_{l=0}^{\infty} w_l$.

Satz 4.3.19 *Seien* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *und* $\sum_{l=0}^{\infty} w_l$ *absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen und sei* $\sum_{m=0}^{\infty} v_m$ *ihr Cauchy-Produkt. Dann gilt:*

(i) $\sum_{m=0}^{\infty} v_m$ *ist absolut konvergent.*

(ii) $\sum_{m=0}^{\infty} v_m = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z_k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} w_l \right)$.

Beweis. Die Familie $(z_k w_l)_{(k,l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0}$ ist summierbar, denn für jede Menge $I \in \mathcal{E}(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)$ gibt es $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit

$$I \subseteq \{0, \ldots, i\} \times \{0, \ldots, j\}$$

und daher gilt

$$\sum_{(k,l)\in I} |z_k w_l| \leq \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} |z_k w_l| = \left(\sum_{k=0}^{i} |z_k|\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{j} |w_l|\right) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} |w_l|\right) .$$

Nach dem Großen Umordnungssatz ist dann auch die Familie $(v_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ summierbar, was nach Lemma 4.3.5 dazu äquivalent ist, dass die Reihe $\sum\limits_{m=0}^{\infty} v_m$ absolut konvergent ist. Außerdem gilt

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} z_k w_l = \sum_{m=0}^{\infty} v_m .$$

Andererseits liefern der Doppelreihensatz und Satz 4.1.3

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} z_k w_l = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} z_k w_l\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(z_k \sum_{l=0}^{\infty} w_l\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z_k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} w_l\right) .$$

□

4.4 Potenzreihen

Die wichtigsten Reihen in der Analysis sind die Potenzreihen.

Definition 4.4.1 *Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen und seien $z, z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Potenzreihe *mit Zentrum z_0 und den Koeffizienten a_k.*

Dabei stellt man sich vor, dass z_0 und die Koeffizienten a_k gegeben sind, während z variabel ist.

Wir behandeln jetzt die Frage, für welche $z \in \mathbb{C}$ eine Potenzreihe konvergiert. Offensichtlich ist jede Potenzreihe mit Zentrum z_0 für $z = z_0$ konvergent. Wie das folgende Beispiel zeigt, gibt es Potenzreihen, die nur für $z = z_0$ konvergent sind.

Beispiel 4.4.2 Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!\,(z - z_0)^k$ ist für $z \neq z_0$ divergent. Dies folgt mittels Quotientenkriterium aus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|(k+1)!\,(z - z_0)^{k+1}\right|}{|k!\,(z - z_0)^k|} = \lim_{k\to\infty} (k+1)|z - z_0| = +\infty \quad \text{für} \quad z \neq z_0 .$$

□

Satz 4.4.3 *Sei $P(z)$ eine Potenzreihe mit Zentrum z_0 und sei $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Dann gilt:*

(i) *Ist $P(z_1)$ konvergent, so ist $P(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ absolut konvergent.*

(ii) *Ist $P(z_1)$ divergent, so ist $P(z)$ auch für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ divergent.*

Beweis. (i) Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ und sei $P(z_1)$ konvergent. Dann ist $\big(a_k(z_1-z_0)^k\big)_{k\geq 0}$ eine Nullfolge und somit insbesondere beschränkt. Also können wir ein $c \in \mathbb{R}$ so wählen, dass

$$\left|a_k(z_1-z_0)^k\right| \leq c \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Damit erhalten wir

$$\left|a_k(z-z_0)^k\right| \leq \left|a_k(z_1-z_0)^k\right| \cdot \left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\right)^k \leq c \cdot \left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\right)^k \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0 \,,$$

woraus mittels Majorantenkriterium und Beispiel 4.1.2 die Behauptung folgt.

(ii) Sei $P(z_1)$ divergent und sei $|z-z_0| > |z_1-z_0|$. Wäre $P(z)$ konvergent, so wäre nach (i) auch $P(z_1)$ konvergent. Da wir so einen Widerspruch erhalten, muss $P(z)$ divergent sein. □

Definition 4.4.4 *Sei $P(z)$ eine Potenzreihe mit Zentrum z_0. Dann heißt*

$$\rho := \sup\{|z-z_0| : z \in \mathbb{C} \text{ und } P(z) \text{ ist konvergent}\} \in [0,+\infty]$$

Konvergenzradius *von $P(z)$. Ist $\rho \in \mathbb{R}_+$, so wird $B_\rho(z_0)$* **Konvergenzkreis** *von $P(z)$ genannt.*

Dabei ist

$$[0,+\infty] := [0,+\infty[\,\cup\, \{+\infty\} \subseteq \overline{\mathbb{R}} \,.$$

Die Begriffe Konvergenzradius und Konvergenzkreis erklären sich durch

Satz 4.4.5 *Sei $P(z)$ eine Potenzreihe mit Zentrum z_0 und sei ρ ihr Konvergenzradius. Dann gilt:*

(i) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < \rho$ ist $P(z)$ absolut konvergent.*

(ii) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > \rho$ ist $P(z)$ divergent.*

Insbesondere ist $P(z)$ im Fall $\rho = +\infty$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und im Fall $\rho = 0$ nur für $z = z_0$ konvergent.

Beweis. Die Behauptungen ergeben sich aus Satz 4.4.3. □

Beispiel 4.4.6 Der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k$ ist 1 (vgl. Beispiel 4.1.2). Der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} k!\,(z-z_0)^k$ ist 0 (vgl. Beispiel 4.4.2). □

Mit den nächsten beiden Sätzen erhalten wir Formeln zur Berechnung des Konvergenzradius von Potenzreihen.

Satz 4.4.7 (Formel von Cauchy–Hadamard) *Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen, sei $\lambda := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ und sei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$. Dann gilt*

$$\rho = \begin{cases} 1/\lambda & \text{, falls } \lambda \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{, falls } \lambda = +\infty \\ +\infty & \text{, falls } \lambda = 0 \end{cases} \,.$$

Beweis. Dies folgt mit Hilfe des Wurzelkriteriums aus

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|} = \lambda\,|z-z_0| \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

$\square$

Satz 4.4.8 (Formel von Euler) *Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen, sei $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und sei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$. Existiert $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k|/|a_{k+1}|$ in $\overline{\mathbb{R}}$, d.h. die Folge $(|a_k|/|a_{k+1}|)_{k\geq 0}$ ist konvergent oder divergiert bestimmt gegen $+\infty$, so ist*

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}\,.$$

Beweis. Man wende auf $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ das Quotientenkriterium an. $\square$

Beispiel 4.4.9 (i) Für jedes $q \in \mathbb{Q}$ hat die Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-q}\, z^k$ den Konvergenzradius 1. Dies folgt mit Satz 4.4.7 aus

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^q} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}^{\,q} = 1 \quad \text{für alle} \quad q \in \mathbb{Q}\,.$$

(ii) Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k!\, k^{-k}\, z^k$ ist e. Das ergibt sich mit Satz 4.4.8 aus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!\,(k+1)^{k+1}}{(k+1)!\,k^k} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \mathrm{e}\,.$$

$\square$

Bemerkung 4.4.10 Über Konvergenz oder Divergenz einer Potenzreihe auf dem Rand $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = \rho\}$ ihres Konvergenzkreises $B_\rho(z_0)$ kann keine allgemeine Aussage gemacht werden. Zum Beispiel haben die Potenzreihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1}\, z^k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-2}\, z^k$ nach Beispiel 4.4.9(i) alle den Konvergenzradius 1. Jedoch ist ihr Konvergenzverhalten für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ unterschiedlich. Während $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ divergent ist (vgl. Beispiel 4.1.2), konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-2}\, z^k$ für alle solche z absolut (vgl. Beispiel 4.2.9). Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1}\, z^k$ ist für $z = 1$ divergent und für $z = -1$ konvergent. $\square$

Wir wollen jetzt noch den so genannten Identitätssatz für Potenzreihen beweisen. Dafür benutzen wir die folgende Abschätzung des so genannten **Reihenrestes** $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ einer Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$.

Lemma 4.4.11 *Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann existiert zu jedem $R \in\,]0,\rho[$ und zu jedem $m \in \mathbb{N}_0$ ein $c \in \mathbb{R}$ mit*

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty} a_k(z-z_0)^k\right| \leq c\,|z-z_0|^m \quad \textit{für} \quad |z-z_0| \leq R\,.$$

Beweis. Sei $R \in \,]0, \rho[$. Nach Satz 4.4.5 ist dann $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = R$ absolut konvergent. Also ist auch die Reihe $\sum\limits_{l=0}^{\infty} |a_{m+l}| R^l$ konvergent. Wir setzen

$$c := \sum_{l=0}^{\infty} |a_{m+l}| R^l$$

und schließen mit Satz 4.1.9, dass für $|z - z_0| \leq R$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right| &\leq \sum_{k=m}^{\infty} |a_k| \cdot |z - z_0|^k \\
&= |z - z_0|^m \sum_{k=m}^{\infty} |a_k| \cdot |z - z_0|^{k-m} \\
&\leq |z - z_0|^m \sum_{l=0}^{\infty} |a_{m+l}| R^l \\
&= c\, |z - z_0|^m \,.
\end{aligned}$$

□

Satz 4.4.12 (Identitätssatz für Potenzreihen) *Seien* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ *und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$ *Potenzreihen mit den Konvergenzradien* $\rho_1 > 0$ *bzw.* $\rho_2 > 0$ *und sei* $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *eine Folge komplexer Zahlen mit*

$$0 < |z_j - z_0| < \min\{\rho_1, \rho_2\} \quad \textit{für alle} \quad j \in \mathbb{N}$$

und

$$\lim_{j \to \infty} z_j = z_0 \,.$$

Gilt dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_j - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z_j - z_0)^k \quad \textit{für alle} \quad j \in \mathbb{N} \,, \tag{4.4.1}$$

so ist

$$a_k = b_k \quad \textit{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Beweis. Wir betrachten die Potenzreihe $P(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, wobei $c_k := a_k - b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und setzen voraus, dass (4.4.1) gilt, d.h.

$$P(z_j) = 0 \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N} \,. \tag{4.4.2}$$

Wir müssen zeigen, dass

$$c_k = 0 \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{4.4.3}$$

Angenommen, das gilt nicht. Dann exististiert ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$ derart, dass

$$c_{k_0} \neq 0 \quad \text{und} \quad c_0 = c_1 = \cdots = c_{k_0 - 1} = 0 \,.$$

Nach Lemma 4.4.11 können wir dann ein $c \in \mathbb{R}$ so wählen, dass

$$\left| P(z_j) - c_{k_0} (z_j - z_0)^{k_0} \right| \leq c\, |z_j - z_0|^{k_0 + 1} \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N} \,.$$

Dies impliziert wegen (4.4.2), dass

$$|c_{k_0}| \leq c\, |z_j - z_0| \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N} \,.$$

Da nach Voraussetzung außerdem $\lim\limits_{j \to \infty} |z_j - z_0| = 0$ gilt, folgt $c_{k_0} = 0$. Damit haben wir einen Widerspruch erhalten. Also gilt (4.4.3). □

4.5 Die Exponentialfunktion, die hyperbolischen und die trigonometrischen Funktionen

Wir betrachten die Potenzreihe

$$E(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} .$$

Mit Hilfe von Satz 4.4.8 sieht man, dass der Konvergenzradius dieser Potenzreihe $+\infty$ ist. Also ist $E(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. Das rechtfertigt

Definition 4.5.1 *Die* **Expontentialfunktion** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist durch*

$$\exp(z) := E(z) \quad \textit{für} \quad z \in \mathbb{C}$$

definiert.

Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften.

Satz 4.5.2 (i) *Es ist* $\exp(0) = 1$.

(ii) *Für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *ist* $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$.

(iii) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *ist* $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(-z) = 1/\exp(z)$.

Beweis. (i) Das ist offensichtlich.

(ii) Wir benutzen Satz 4.3.19. Danach gilt für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{z_1^j}{j!} \cdot \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z_1^j z_2^{k-j} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} \\ &= \exp(z_1 + z_2) . \end{aligned}$$

(iii) Nach (i) und (ii) gilt

$$\exp(z) \cdot \exp(-z) = 1 \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} .$$

Dies liefert die Behauptung. □

Bemerkung 4.5.3 Später werden wir zeigen, dass $\exp(1) = \mathrm{e}$. □

Wie man unmittelbar sieht, ist

$$\exp(x) \in \mathbb{R} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} .$$

Desweiteren haben wir

Satz 4.5.4 *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt:*

(i) $x > 0 \Longrightarrow \exp(x) > 1$,

(ii) $x < 0 \Longrightarrow 0 < \exp(x) < 1$,

(iii) $x < y \Longrightarrow \exp(x) < \exp(y)$.

Beweis. (i) Das ist offensichtlich.

(ii) Die Behauptung folgt mittels Satz 4.5.2(iii) aus (i).

(iii) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und gelte $x < y$. Nach (i), (ii) und Satz 4.5.2(i) ist dann $\exp(x) > 0$ und $\exp(y - x) > 1$. Mit Satz 4.5.2(ii) folgt

$$\exp(x) < \exp(y-x) \cdot \exp(x) = \exp(y - x + x) = \exp(y) \ .$$

□

Aus der Expontentialfunktion können weitere wichtige Funktionen konstruiert werden.

Definition 4.5.5 *Wir definieren die Funktionen* $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, genannt* **Cosinus hyperbolicus** *oder* **hyperbolischer Cosinus***, und* $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, genannt* **Sinus hyperbolicus** *oder* **hyperbolischer Sinus** *durch*

$$\cosh(z) := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} \quad \textit{und} \quad \sinh(z) := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} \quad \textit{für} \quad z \in \mathbb{C} \ .$$

Die Funktionen $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, genannt* **Cosinus***, und* $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, genannt* **Sinus***, definieren wir durch*

$$\cos(z) := \frac{\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)}{2} \quad \textit{und} \quad \sin(z) := \frac{\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)}{2\,\mathrm{i}} \quad \textit{für} \quad z \in \mathbb{C} \ .$$

Aus Definition 4.5.5 folgt sofort, dass

$$\cosh(x) \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \sinh(x) \in \mathbb{R} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

und dass

$$\cos(z) = \cosh(\mathrm{i}z) \quad \text{und} \quad \sin(z) = \frac{\sinh(\mathrm{i}z)}{\mathrm{i}} \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \ . \tag{4.5.1}$$

Außerdem sieht man, dass für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\cosh(-z) = \cosh(z) \quad \text{und} \quad \sinh(-z) = -\sinh(z)$$

sowie

$$\cos(-z) = \cos(z) \quad \text{und} \quad \sin(-z) = -\sin(z) \ .$$

Die Funktionen cosh, sinh, cos und sin haben folgende Potenzreihendarstellungen.

Satz 4.5.6 *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \textit{und} \quad \sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sowie

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \textit{und} \quad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \ .$$

Beweis. Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-z)^l}{l!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty} \left(1+(-1)^l\right)\frac{z^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} .$$

Analog leitet man die anderen Potenzreihenentwicklungen ab. □

Aus Satz 4.5.6 erhält man insbesondere, dass

$$\cos(x) \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \sin(x) \in \mathbb{R} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} .$$

Wie üblich sei

$$\cosh^2(z) := (\cosh(z))^2 \quad \text{und} \quad \sinh^2(z) := (\sinh(z))^2 .$$

Satz 4.5.7 *Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:*

(i) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$,

(ii) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \sinh(z_1)\sinh(z_2)$,

(iii) $\sinh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\sinh(z_2) + \sinh(z_1)\cosh(z_2)$.

Beweis. Übung. □

Satz 4.5.8 *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $x < y \Longrightarrow \sinh(x) < \sinh(y)$,

(ii) $0 \le x < y \Longrightarrow \cosh(x) < \cosh(y)$,

(iii) $\cosh(x) \ge 1$.

Beweis. (i) Mit Satz 4.5.4(iii) schließen wir

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad \exp(x) < \exp(y) \ \text{ und } \ -\exp(-x) < -\exp(-y) \quad \Longrightarrow \quad \sinh(x) < \sinh(y) .$$

(ii) Nach Satz 4.5.4 ist

$$\cosh(x) > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} .$$

Hieraus, aus (i) und aus Satz 4.5.7(i) folgern wir

$$\begin{aligned} 0 \le x < y \quad &\Longrightarrow \quad 0 = \sinh(0) \le \sinh(x) < \sinh(y) \\ &\Longrightarrow \quad \sinh^2(x) < \sinh^2(y) \\ &\Longrightarrow \quad 1 + \sinh^2(x) < 1 + \sinh^2(y) \\ &\Longrightarrow \quad \cosh^2(x) < \cosh^2(y) \\ &\Longrightarrow \quad \cosh(x) < \cosh(y) . \end{aligned}$$

(iii) Das ist eine Konsequenz von (ii), $\cosh(0) = 1$ und $\cosh(-x) = \cosh(x)$. □

Satz 4.5.9 *Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:*

(i) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$,

(ii) $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$,

(iii) $\sin(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\sin(z_2) + \sin(z_1)\cos(z_2)$,

(iv) $\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$. *(Eulersche Formel)*

Beweis. Die Behauptungen (i), (ii) und (iii) kann man mittels (4.5.1) aus Satz 4.5.7 ableiten. Die letzte Aussage folgt unmittelbar aus Definition 4.5.5. □

Die obigen Definitionen sind noch zu ergänzen durch

Definition 4.5.10 *Der* **Tangens hyperbolicus** *und der* **Cotangens hyperbolicus** *sind durch*

$$\tanh(z) := \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \quad \textit{bzw.} \quad \coth(z) := \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)}\ ,$$

der **Tangens** *und der* **Cotangens** *durch*

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad \textit{bzw.} \quad \cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

definiert.

Bemerkung 4.5.11 (i) Die Funktionen cosh, sinh, tanh und coth nennt man **hyperbolische Funktionen**. Die Funktionen cos, sin, tan und cot heißen **trigonometrische Funktionen**.

(ii) Die Beziehungen (ii) und (iii) der Sätze 4.5.7 und 4.5.9 werden als **Additionstheoreme** bezeichnet.

□

Kapitel 5

Stetige Abbildungen

5.1 Grenzwerte von Abbildungen

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und sei $M \subseteq X$.

Definition 5.1.1 (i) *Ein $a \in X$ heißt* **Häufungspunkt** *von M* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x \in M : (x \neq a \text{ und } x \in B_\varepsilon(a))\ .$$

(ii) *Ein $a \in M$ heißt* **isolierter Punkt** *von M* $:\Longleftrightarrow$ *a ist kein Häufungspunkt von M.*

Satz 5.1.2 (i) *Ein $a \in X$ ist genau dann ein Häufungspunkt von M, wenn eine Folge (x_k) in $M \setminus \{a\}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ existiert.*

(ii) *Ein $a \in M$ ist genau dann ein isolierter Punkt von M, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \cap M = \{a\}$ existiert.*

Beweis. Übung. □

Beispiel 5.1.3 Sei $\mathbb{R}$ wieder mit der Standardmetrik $d_\mathbb{R}$ versehen. Die Menge der Häufungspunkte von $M_1 :=]0,1[\cup \{2\} \cup]3,4[$ ist $[0,1] \cup [3,4]$. Der einzige isolierte Punkt von M_1 ist 2. Die Menge $M_2 := \{1/k : k \in \mathbb{N}\}$ hat nur 0 als Häufungspunkt. Folglich ist jedes Element von M_2 ein isolierter Punkt von M_2. □

Sei (Y, d_Y) ein weiterer metrischer Raum und sei $f : M \to Y$.

Definition 5.1.4 *Ist a ein Häufungspunkt von M und ist $b \in Y$, so sagt man, f* **hat in** a **den Grenzwert** b *oder $f(x)$* **konvergiert gegen** b **für** $x \to a$ $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in M \setminus \{a\} : (d_X(x,a) < \delta \implies d_Y(f(x), b) < \varepsilon)\ .$$

Hat f in a den Grenzwert b, so schreiben wir dafür

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

oder

$$f(x) \to b \quad \text{für} \quad x \to a\ .$$

Der Grenzwert einer Abbildung kann folgendermaßen auf die Konvergenz von Folgen zurückgeführt werden.

Satz 5.1.5 *Sei a ein Häufungspunkt von M und sei $b \in Y$. Dann gilt $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ genau dann, wenn $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$ für jede Folge (x_k) in $M \setminus \{a\}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.*

Beweis. ($\Longrightarrow$) Gelte $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ und sei (x_k) eine Folge in $M \setminus \{a\}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$, dass

$$d_Y(f(x), b) < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in M \setminus \{a\} \quad \text{mit} \quad d_X(x, a) < \delta\ . \tag{5.1.1}$$

Außerdem existiert zu jedem $\delta > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d_X(x_k, a) < \delta \quad \text{für alle} \quad k \geq k_0\ . \tag{5.1.2}$$

Aus (5.1.1) und (5.1.2) folgt

$$d_Y(f(x_k), b) < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \geq k_0\ .$$

Also gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.

($\Longleftarrow$) Wir beweisen diese Richtung durch Kontraposition und setzen somit voraus, dass $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ nicht gilt. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ derart, dass zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in M \setminus \{a\}$ mit

$$d_X(x_k, a) < \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad d_Y(f(x_k), b) \geq \varepsilon_0$$

existiert. Folglich gibt es eine Folge (x_k) in $M \setminus \{a\}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, für die $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$ nicht gilt. $\square$

Existiert der Grenzwert von f in a, so ist er eindeutig bestimmt. Das heißt, es gilt

Satz 5.1.6 *Ist $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$ und $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_2$, so ist $b_1 = b_2$.*

Beweis. Das folgt aus den Sätzen 3.1.12 und 5.1.5. $\square$

Wir führen jetzt eine Reihe von Beispielen an.

Beispiel 5.1.7 Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) := \lambda z + \mu$$

definiert. Aus

$$d_{\mathbb{C}}(f(z), f(a)) = |f(z) - f(a)| = |\lambda| \cdot |z - a| = |\lambda|\, d_{\mathbb{C}}(z, a) \quad \text{für alle} \quad z, a \in \mathbb{C}$$

folgt

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a) \quad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{C}\ .$$

$\square$

Beispiel 5.1.8 Wir zeigen, dass

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1\ . \tag{5.1.3}$$

Die Reihe

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ist für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent. Also existiert nach Lemma 4.4.11 ein $c > 0$ mit

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq c\,|z|^3 \quad \text{für} \quad |z| \leq 1\ .$$

Es folgt

$$\left| \frac{\sin(z)}{z} - 1 \right| = \left| \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq c\,|z|^2 \quad \text{für} \quad 0 < |z| \leq 1\ .$$

Demnach gilt für alle $\varepsilon > 0$ und alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$d_{\mathbb{C}}(z, 0) = |z| < \min\left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon}{c}}, 1 \right\} \quad \Longrightarrow \quad d_{\mathbb{C}}\left(\frac{\sin(z)}{z}, 1 \right) = \left| \frac{\sin(z)}{z} - 1 \right| < \varepsilon\ ,$$

womit (5.1.3) bewiesen ist. □

Beispiel 5.1.9 Wir betrachten das Signum $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vgl. Definition 2.2.1). Sei (x_k) die durch

$$x_k := \frac{(-1)^k}{k}$$

gegebene Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Die Folge $(\operatorname{sgn} x_k)$ ist aber divergent, denn

$$\operatorname{sgn} x_k = \begin{cases} 1 & \text{für gerades } k \\ -1 & \text{für ungerades } k \end{cases}\ .$$

Dies impliziert mit Satz 5.1.5, dass $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ nicht existiert. □

Beispiel 5.1.10 Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und sei $f : M \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2) := \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}$$

definiert. Dann gilt

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0\ . \tag{5.1.4}$$

Das kann man wie folgt einsehen. Wir haben

$$f(x) = \frac{\left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\right)(x_1 - x_2)}{x_1^2 + x_2^2} = \left(1 + \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)(x_1 - x_2) \quad \text{für alle} \quad x = (x_1, x_2) \in M\ .$$

Da

$$|x_1 x_2| \leq \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) \quad \text{und} \quad |x_1 - x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq 2\,\|x\|\ ,$$

folgt

$$|f(x)| \leq \left(1 + \frac{|x_1 x_2|}{x_1^2 + x_2^2} \right)|x_1 - x_2| \leq \frac{3}{2}\,|x_1 - x_2| \leq 3\,\|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in M\ .$$

Für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in M$ gilt somit

$$d_{\mathbb{R}^2}(x, 0) = \|x\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \Longrightarrow \quad d_{\mathbb{R}}(f(x), 0) = |f(x)| < \varepsilon$$

Damit ist (5.1.4) gezeigt. □

Beispiel 5.1.11 Sei wieder $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und sei $f : M \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2) := \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$$

definiert. Dann gilt

$$f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k^2}} \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty$$

und

$$f\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad k \to \infty \, .$$

Da

$$\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \to 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty \, ,$$

folgt mit Satz 5.1.5, dass $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nicht existiert. □

Bemerkung 5.1.12 Ist $a = (a_1, a_2)$ ein Häufungspunkt von $M \subseteq \mathbb{R}^2$ und ist $f : M \to Y$, so kann aus der Existenz der iterierten Grenzwerte

$$\lim_{x_1 \to a_1} \lim_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2) \quad \text{und} \quad \lim_{x_2 \to a_2} \lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2) \, ,$$

selbst wenn sie übereinstimmen, nicht auf die Existenz von $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ geschlossen werden. Zum Beispiel gilt für die Abbildung f aus Beispiel 5.1.11

$$\lim_{x_1 \to 0} \lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \to 0} \lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2) = 0 \, ,$$

aber $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert, wie gerade gezeigt, nicht. □

Für die Grenzwerte komplexwertiger Abbildungen gelten folgende Rechenregeln.

Satz 5.1.13 *Sei a ein Häufungspunkt von $M \subseteq X$, seien $f_1, f_2 : M \to \mathbb{C}$ und sei*

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = b_1 \quad \textit{und} \quad \lim_{x \to a} f_2(x) = b_2 \, .$$

Dann gilt:

(i) $\lim\limits_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) + \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$.

(ii) $\lim\limits_{x \to a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$.

(iii) *Ist $b_2 \neq 0$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $f_2(x) \neq 0$ für alle $x \in (M \cap B_\varepsilon(a)) \setminus \{a\}$, und es gilt*

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)} \, .$$

Beweis. Die Behauptungen ergeben sich mit Satz 5.1.5 aus Satz 3.2.7(i) und Satz 3.2.8. □

Für Grenzwerte reellwertiger Funktionen haben wir

Satz 5.1.14 *Sei a ein Häufungspunkt von $M \subseteq X$, seien $f_1, f_2, f : M \to \mathbb{R}$ und sei*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = b_1 \ , \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = b_2 \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b \ .$$

Dann gilt:

(i) *Ist $f_1(x) \leq f_2(x)$ für alle $x \in M$, so ist $b_1 \leq b_2$.*

(ii) *Ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in M$ und ist $q \in \mathbb{Q}$ und $q \geq 0$, so ist $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^q = b^q$.*

Beweis. Das folgt mit Satz 5.1.5 aus Satz 3.2.10 und Folgerung 3.2.12. □

Der Grenzwertbegriff für Abbildungen kann in speziellen Situationen wie folgt verallgemeinert werden.

Definition 5.1.15 *Sei a ein Häufungspunkt von $M \subseteq X$ und sei $f : M \to \mathbb{R}$. Man sagt:*

(i) f **hat in** a **den Grenzwert** $+\infty :\Longleftrightarrow$

$$\forall\, c \in \mathbb{R}\, \exists\, \delta > 0\, \forall x \in M \setminus \{a\} : (d_X(x,a) < \delta \implies f(x) > c) \ .$$

(ii) f **hat in** a **den Grenzwert** $-\infty :\Longleftrightarrow$

$$\forall\, c \in \mathbb{R}\, \exists\, \delta > 0\, \forall x \in M \setminus \{a\} : (d_X(x,a) < \delta \implies f(x) < c) \ .$$

Hat f in a den Grenzwert $+\infty$ bzw. $-\infty$, so schreibt man $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ bzw. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

In den folgenden Definitionen sei (Y, d_Y) wieder ein beliebiger metrischer Raum.

Definition 5.1.16 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, sei $f : M \to Y$ und sei $b \in Y$.*

(i) *Ist* $\sup M = +\infty$*, so sagt man,* $f(x)$ **konvergiert gegen** b **für** $x \to +\infty :\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, c \in \mathbb{R}\, \forall\, x \in M : (x > c \implies d_Y(f(x), b) < \varepsilon) \ .$$

(ii) *Ist* $\inf M = -\infty$*, so sagt man,* $f(x)$ **konvergiert gegen** b **für** $x \to -\infty :\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, c \in \mathbb{R}\, \forall\, x \in M : (x < c \implies d_Y(f(x), b) < \varepsilon) \ .$$

Man schreibt dann $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Jetzt definieren wir noch die so genannten **einseitigen Grenzwerte**.

Definition 5.1.17 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, sei $f : M \to Y$ und sei $b \in Y$.*

(i) *Ist a ein Häufungspunkt von $M \cap [a, +\infty[$, so sagt man,* f **hat in** a **den rechtsseitigen Grenzwert** $b :\Longleftrightarrow f\big|_{M \,\cap\, [a,+\infty[}$ *hat in a den Grenzwert b.*

(ii) *Ist a ein Häufungspunkt von $M \cap\,]-\infty, a]$, so sagt man,* f **hat in** a **den linksseitigen Grenzwert** $b :\Longleftrightarrow f\big|_{M \,\cap\,]-\infty,a]}$ *hat in a den Grenzwert b.*

Für den rechtsseitigen Grenzwert von f in a schreiben wir $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, für den linksseitigen $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$.

Bemerkung 5.1.18 (i) Analog definiert man, dass $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$ bzw. $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$.

(ii) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, sei $f : M \to Y$ und sei a sowohl ein Häufungspunkt von $M \cap [a, +\infty[$ als auch von $M \cap]-\infty, a]$. Wie man direkt aus den Definitionen 5.1.4 und 5.1.17 erhält, existiert in dieser Situation der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ genau dann, wenn die einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ existieren und übereinstimmen.

(iii) Die Sätze 5.1.5, 5.1.6, 5.1.13 und 5.1.14 gelten für die verallgemeinerten Grenzwerte in analoger Form.

□

Beispiel 5.1.19 Wie man einfach sieht, gilt für reelle x:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} |x|^{-1} = +\infty$, aber $\lim\limits_{x\to 0} x^{-1}$ existiert nicht.

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-1} = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{-1} = 0$.

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

(iv) $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$.

(v) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{-1} = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to 0-} x^{-1} = -\infty$.

□

Beispiel 5.1.20 Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^m} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} x^m \exp(x) = 0\ .$$

Dies ergibt sich aus

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \quad \text{für alle} \quad x \geq 0$$

und (vgl. Satz 4.5.2(iii))

$$x^m \exp(x) = (-1)^m \left(\frac{\exp(-x)}{(-x)^m}\right)^{-1} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}\ .$$

□

5.2 Stetigkeit

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) wieder zwei beliebige metrische Räume.

Definition 5.2.1 *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* **stetig in** $a \in X$ $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in X : (d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon)\ .$$

Beispiel 5.2.2 Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ und alle konstanten Abbildungen $f : X \to Y$ sind stetig in jedem $a \in M$. □

Offenbar gilt

Satz 5.2.3 *Sei $a \in A \subseteq X$ und sei A mit der d_X induzierte Metrik versehen. Ist $f : X \to Y$ stetig in a, so ist auch $f\big|_A : A \to Y$ stetig in a.* □

Die nächsten beiden Sätze charakterisieren die Stetigkeit mittels Grenzwerten von Abbildungen bzw. Konvergenz von Folgen.

Satz 5.2.4 (i) *Ist $a \in X$ ein Häufungspunkt von X, so ist $f : X \to Y$ genau dann stetig in a, wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

(ii) *Ist $a \in X$ ein isolierter Punkt von X, so ist jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig in a.*

Beweis. (i) Das folgt unmittelbar aus den Definitionen 5.1.4 und 5.2.1.

(ii) Sei a ein isolierter Punkt von X. Das bedeutet nach Satz 5.1.2(ii), dass ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) = \{a\}$ existiert. Dann gilt für alle $f : X \to Y$, alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in X$

$$d_X(x,a) < \delta \quad\Longrightarrow\quad x = a \quad\Longrightarrow\quad d_Y(f(x), f(a)) = 0 \quad\Longrightarrow\quad d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon \ ,$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

Beispiel 5.2.5 (i) Die Abbildungen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \lambda z + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, sind nach Beispiel 5.1.7 und Satz 5.2.4 in jedem $a \in \mathbb{C}$ stetig.

(ii) Die Abbildung $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nach Beispiel 5.1.9 und Satz 5.2.4 **unstetig in** 0, d.h. nicht stetig in 0.

□

Satz 5.2.6 *Sei $a \in X$ und sei $f : X \to Y$. Es ist f genau dann stetig in a, wenn $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$ für jede Folge (x_k) in X mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.*

Beweis. Das ergibt sich aus den Sätzen 5.1.5 und 5.2.4. □

Sei jetzt (Z, d_Z) ein weiterer metrischer Raum.

Satz 5.2.7 *Sei $f : X \to Y$ stetig in $a \in X$ und sei $g : Y \to Z$ stetig in $f(a) \in Y$. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ stetig in a.*

Beweis. Wir benutzen Satz 5.2.6. Sei (x_k) eine Folge in X mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. Da f stetig in a ist, ist $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$. Da g stetig in $f(a)$ ist, folgt

$$\lim_{k\to\infty} (g \circ f)(x_k) = \lim_{k\to\infty} g(f(x_k)) = g(f(a)) = g \circ f(a) \ ,$$

womit der Satz bewiesen ist. □

Satz 5.2.8 *Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ metrische Räume, seien $f_j : X \to Y_j$, $j = 1, \ldots, n$, und sei $a \in X$. Die Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to Y_1 \times \cdots \times Y_n$, definiert durch $f(x) := (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, ist genau dann stetig in a, wenn f_j für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ stetig in a ist.*

Beweis. Die Aussage leitet man aus den Sätzen 3.1.15 und 5.2.6 ab. □

Bezüglich der Stetigkeit komplexwertiger Abbildungen haben wir

Satz 5.2.9 *Seien* $f_1, f_2 : X \to \mathbb{C}$ *stetig in* $a \in X$. *Dann gilt:*

(i) *Die Abbildungen* $f_1 + f_2 : X \to \mathbb{C}$, $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$, *und* $f_1 \cdot f_2 : X \to \mathbb{C}$, $(f_1 \cdot f_2)(x) := f_1(x) \cdot f_2(x)$, *sind stetig in* a.

(ii) *Ist* $f_2(x) \neq 0$ *für alle* $x \in X$, *so ist auch die Abbildung* $f_1/f_2 : X \to \mathbb{C}$, $(f_1/f_2)(x) := f_1(x)/f_2(x)$ *stetig in* a.

Beweis. Man benutze die Sätze 3.2.7, 3.2.8 und 5.2.6. □

Beispiel 5.2.10 (i) Jedes **Polynom** p, d.h. jede Abbildung

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ , \quad p(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0\ ,$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$, ist nach Beispiel 5.2.5 und Satz 5.2.9(i) in jedem $a \in \mathbb{C}$ stetig.

(ii) Jede **rationale Funktion** f, d.h. jede Abbildung

$$f : A \to \mathbb{C}\ , \quad f(z) = \frac{p_1(z)}{p_2(z)}\ ,$$

wobei $p_1, p_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome sind und $A := \{z \in \mathbb{C} : p_2(z) \neq 0\}$ gesetzt ist, ist nach (i) und Satz 5.2.9(ii) in jedem Punkt a ihres Definitionsbereiches A stetig.

(iii) Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist in jedem $a \in \mathbb{C}$ stetig. Das kann man wie folgt sehen. Man zeigt zunächst, dass exp stetig in 0 ist, und folgert daraus mit Hilfe von Satz 4.5.2(ii), dass exp auch in allen anderen $a \in \mathbb{C}$ stetig ist. Die Details verbleiben als Übung.

(iv) Die Funktionen $\cosh, \sinh, \cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind in jedem $a \in \mathbb{C}$ stetig. Dies folgt mit den Sätzen 5.2.8 und 5.2.9 aus (i), (iii) und Definition 4.5.5.

□

Zur Stetigkeit von Funktionen einer reellen Veränderlichen haben wir

Satz 5.2.11 *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sei* a *ein Häufungspunkt sowohl von* $A \cap [a, +\infty[$ *als auch von* $A \cap]-\infty, a]$ *und sei* $f : A \to Y$. *Dann ist* f *genau dann stetig in* a, *wenn die einseitigen Grenzwerte* $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ *und* $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ *existieren und*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)\ .$$

Beweis. Die Behauptung erhält man aus Bemerkung 5.1.18(ii) und Satz 5.2.4. □

Die Unstetigkeitsstellen reeller Funktionen können demnach folgendermaßen klassifiziert werden.

Definition 5.2.12 *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}$, *sei* $a \in A$ *ein Häufungspunkt von* A *und sei* $f : A \to Y$.

(i) *Der Punkt* a *heißt* **hebbare Unstetigkeitsstelle** *von* f $:\iff$ *Der Grenzwert* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *existiert, aber* $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

(ii) *Der Punkt* a *heißt* **Sprungstelle** *von* f $:\iff$ *Die einseitigen Grenzwerte* $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ *und* $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ *existieren, aber* $\lim\limits_{x \to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-} f(x)$.

Die in (i) und (ii) definierten Unstetigkeitsstellen werden auch **Unstetigkeitsstellen** *von* f **erster Art** *genannt.*

(iii) *Der Punkt a heißt* **Unstetigkeitsstelle** *von f* **zweiter Art** $:\Longleftrightarrow$ *Mindestens einer der einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ existiert nicht in $\mathbb{R}$.*

Beispiel 5.2.13 (i) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

definiert. Dann ist 0 eine hebbare Unstetigkeitsstelle von f.

(ii) Der Punkt 0 ist eine Sprungstelle von $\operatorname{sgn}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(iii) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die so genannte **Dirichlet-Funktion**, d.h. f sei durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

definiert. Dann ist jedes $a\in\mathbb{R}$ eine Unstetigkeitsstelle von f zweiter Art.

(iv) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} |x|^{-1} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

definiert. Da

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty\ ,$$

ist 0 eine Unstetigkeitsstelle von f zweiter Art.

□

Der Vollständigkeit halber führen wir noch die **einseitige Stetigkeit** ein.

Definition 5.2.14 *Sei $A\subseteq\mathbb{R}$ und sei $f:A\to Y$.*

(i) *f heißt* **rechtsseitig stetig in** $a\in A :\Longleftrightarrow f\big|_{A\,\cap\,[a,+\infty[}$ *ist stetig in a.*

(ii) *f heißt* **linksseitig stetig in** $a\in A :\Longleftrightarrow f\big|_{A\,\cap\,]-\infty,a]}$ *ist stetig in a.*

Satz 5.2.15 *Sei $A\subseteq\mathbb{R}$ und sei $f:A\to Y$.*

(i) *Ist $a\in A$ ein Häufungspunkt von $A\cap[a,+\infty[$, so ist f genau dann rechtsseitig stetig in a, wenn $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$.*

(ii) *Ist $a\in A$ ein Häufungspunkt von $A\cap\,]-\infty,a]$, so ist f genau dann linksseitig stetig in a, wenn $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$.*

Beweis. Das folgt aus Satz 5.2.4(i) und den Definitionen 5.1.17 und 5.2.14. □

Wir betrachten jetzt wieder Abbildungen $f:X\to Y$.

Definition 5.2.16 *Eine Abbildung $f:X\to Y$ heißt* **stetig** $:\Longleftrightarrow$ *f ist in jedem Punkt $a\in X$ stetig, d.h. es gilt*

$$\forall\, a\in X\,\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0\,\forall\,x\in X : (d_X(x,a)<\delta \implies d_Y(f(x),f(a))<\varepsilon)\ . \tag{5.2.1}$$

Beispiel 5.2.17 Nach Beispiel 5.2.10 sind alle Polynome $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und die Funktionen $\exp, \cosh, \sinh, \cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. $\square$

Die Bedingung (5.2.1) kann man auch in der Form

$$\forall\, a \in X\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in X : (x \in B_\delta(a) \implies f(x) \in B_\varepsilon(f(a)))$$

bzw.

$$\forall\, a \in X\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \tag{5.2.2}$$

schreiben. Wir benutzen dies beim Beweis der folgenden Charakterisierung von stetigen Abbildungen.

Satz 5.2.18 *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X, d_X)$ für alle $V \in \mathcal{O}(Y, d_Y)$.*

Beweis. ($\Longrightarrow$) Sei $f : X \to Y$ stetig, d.h. es gelte (5.2.2). Sei $V \in \mathcal{O}(Y, d_Y)$ und sei $a \in f^{-1}(V)$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(V)$ existiert. Wegen $V \in \mathcal{O}(Y, d_Y)$ und $f(a) \in V$ können wir ein $\varepsilon > 0$ so wählen, dass $B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$. Da f stetig ist, finden wir zu diesem ε ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$. Es folgt

$$B_\delta(a) \subseteq f^{-1}\left(B_\varepsilon(f(a))\right) \subseteq f^{-1}(V)\ .$$

($\Longleftarrow$) Gelte $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}(X, d_X)$ für alle $V \in \mathcal{O}(Y, d_Y)$ und seien $a \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $B_\varepsilon(f(a)) \in \mathcal{O}(Y, d_Y)$ (vgl. Satz 3.4.4), ist nach Voraussetzung $f^{-1}\left(B_\varepsilon(f(a))\right) \in \mathcal{O}(X, d_X)$. Außerdem ist $a \in f^{-1}\left(B_\varepsilon(f(a))\right)$. Folglich existiert ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}\left(B_\varepsilon(f(a))\right)$, d.h. mit $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a))$. Damit gilt (5.2.2). Also ist f stetig. $\square$

Folgerung 5.2.19 *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}(X, d_X)$ für alle $B \in \mathcal{F}(Y, d_Y)$.*

Beweis. Die Aussage folgt aus Satz 5.2.18 und den Beziehungen

$$B \in \mathcal{F}(Y, d_Y) \iff Y \setminus B \in \mathcal{O}(Y, d_Y)$$

und

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{F}(X, d_X) \iff f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{O}(X, d_X)\ .$$

$\square$

Wir führen jetzt noch zwei weitere Stetigkeitsbegriffe ein.

Definition 5.2.20 (i) *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* **gleichmäßig stetig** $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in X : (d_X(x_1, x_2) < \delta \implies d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon)\ .$$

(ii) *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* **Lipschitz-stetig** $:\Longleftrightarrow$ *Es existiert ein $L > 0$ mit*

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le L \cdot d_X(x_1, x_2) \quad \textit{für alle} \quad x_1, x_2 \in X\ .$$

Die Konstante L wird dann **Lipschitz-Konstante** *genannt.*

Bemerkung 5.2.21 Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit unterscheiden sich dadurch, dass beim ersten Begriff δ sowohl von ε als auch von $a \in X$ abhängen kann (vgl. (5.2.1)), während beim zweiten Begriff δ nur von ε abhängen darf. $\square$

Satz 5.2.22 *Für jede Abbildung $f : X \to Y$ gilt:*

(i) *Ist f gleichmäßig stetig, so ist f auch stetig.*

(ii) *Ist f Lipschitz-stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig.*

Beweis. (i) Das ist offensichtlich.

(ii) Sei $f : X \to Y$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L und sei $\varepsilon > 0$. Setzen wir $\delta := \varepsilon/L$, so gilt für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) < \delta$

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d_X(x_1, x_2) < L \cdot \delta = \varepsilon \ .$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Beispiel 5.2.23 Die Abbildung $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ist nach Satz 5.2.3 und Beispiel 5.2.10(i) stetig. Sie ist aber nicht gleichmäßig stetig. Ansonsten würde zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\left| f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - f(x) \right| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in [0, +\infty[$$

existieren. Da für alle $\delta > 0$

$$\left| f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - f(x) \right| = \left| \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2 \right| = \delta x + \frac{\delta^2}{4} \to +\infty \quad \text{für} \quad x \to +\infty \ ,$$

kann dies aber nicht gelten. $\square$

Beispiel 5.2.24 Die Abbildung $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$, ist gleichmäßig stetig. Das verifiziert man folgendermaßen. Für $x_1 \geq x_2 \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \leq \sqrt{x_1 - x_2} \quad &\Longleftrightarrow \quad x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \leq x_1 - x_2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\,x_2 \leq 2\sqrt{x_1 x_2} \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{x_2} \leq \sqrt{x_1} \ . \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} \quad \text{für alle} \quad x_1, x_2 \geq 0 \ .$$

Ist nun $\varepsilon > 0$, so setzen wir $\delta := \varepsilon^2$ und erhalten für alle $x_1, x_2 \geq 0$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon \ .$$

Die Abbildung f ist aber nicht Lipschitz-stetig. Da nämlich

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \quad \text{für alle} \quad x_1, x_2 > 0 \ ,$$

findet man zu jedem $L > 0$ reelle Zahlen $x_1, x_2 \geq 0$ mit $|f(x_1) - f(x_2)| > L \cdot |x_1 - x_2|$. $\square$

5.3 Zusammenhängende und wegzusammenhängende Mengen

Wir betrachten einen metrischen Raum (X, d_X).

Definition 5.3.1 *Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt* **zusammenhängend** $:\iff$ *Es existieren keine Mengen $U_1, U_2 \in \mathcal{O}(X, d_X)$ mit*

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset\ , \quad M \cap U_1 \neq \emptyset\ , \quad M \cap U_2 \neq \emptyset \quad \textit{und} \quad M \subseteq U_1 \cup U_2\ . \tag{5.3.1}$$

Beispiel 5.3.2 (i) Die leere Menge und alle Mengen $M \subseteq X$ mit $\operatorname{card} M = 1$ sind zusammenhängende Teilmengen von X.

(ii) Ist $M \subseteq X$ und ist $\operatorname{card} M = 2$, so ist M nicht zusammenhängend. Sind nämlich x_1, x_2 die beiden Elemente von M und ist $c := d(x_1, x_2)/2$, so genügen die offenen Mengen $U_1 := B_c(x_1)$ und $U_2 := B_c(x_2)$ der Beziehung (5.3.1).

□

Es sollen jetzt die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ bezüglich der Standardmetrik $d_\mathbb{R}$ bestimmt werden.

Satz 5.3.3 *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\operatorname{card} M \leq 1$ oder M ein Intervall, also eine der in Definition 2.1.9 angegebenen Mengen ist.*

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Aufgrund von Beispiel 5.3.2(i), können wir uns darauf beschränken, dass $\operatorname{card} M \geq 2$. Offensichtlich ist die Menge M genau dann ein Intervall, wenn sie die Eigenschaft

$$x_1, x_2 \in M \ \text{ und } \ x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad [x_1, x_2] \subseteq M \tag{5.3.2}$$

hat. Also genügt es zu zeigen, dass M genau dann zusammenhängend ist, wenn (5.3.2) gilt.

Gelte (5.3.2) nicht. Dann existieren $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$, für die $[x_1, x_2] \not\subseteq M$, d.h. es gibt ein $\xi \in [x_1, x_2]$ mit $\xi \notin M$. Wir setzen $U_1 :=]-\infty, \xi[$ und $U_2 :=]\xi, +\infty[$. Dann sind U_1, U_2 offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Da $\xi \notin M$, ist $M \subseteq U_1 \cup U_2$. Da $x_1 \in M \cap U_1$ und $x_2 \in M \cap U_2$, ist außerdem $M \cap U_1 \neq \emptyset$ und $M \cap U_2 \neq \emptyset$. Folglich ist M nicht zusammenhängend.

Jetzt setzen wir voraus, dass M nicht zusammenhängend ist, d.h. es existieren offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}$ mit (5.3.1). Wir wählen ein $x_1 \in M \cap U_1$ und ein $x_2 \in M \cap U_2$. O.b.d.A. gelte $x_1 < x_2$. Sei $\xi := \sup(U_1 \cap [x_1, x_2])$. Dann existiert eine Folge (ξ_k) in $U_1 \cap [x_1, x_2]$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = \xi$. Da $U_1 \cap [x_1, x_2] \subseteq [x_1, x_2]$ und da $[x_1, x_2]$ abgeschlossen ist, folgt mit Satz 3.4.14, dass $\xi \in [x_1, x_2]$. Wir zeigen, dass $\xi \notin U_1 \cup U_2$, woraus wegen $M \subseteq U_1 \cup U_2$ folgt, dass $\xi \notin M$ und somit (5.3.2) nicht gilt. Zunächst sehen wir, dass $\xi \notin U_2$. Da nämlich $U_1 \cap [x_1, x_2] \subseteq U_1 \subseteq \mathbb{R} \setminus U_2$ und da $\mathbb{R} \setminus U_2$ nach Voraussetzung abgeschlossen ist, erhalten wir wie oben, dass $\xi \in \mathbb{R} \setminus U_2$. Es gilt auch $\xi \notin U_1$. Da U_1 offen ist, könnten wir andernfalls ein $\varepsilon > 0$ so wählen, dass $]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[\subseteq U_1$ und somit auch $]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[\cap [x_1, x_2] \subseteq U_1 \cap [x_1, x_2]$. Dies würde

$$\min\{\xi + \varepsilon, x_2\} = \sup(]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[\cap [x_1, x_2]) \leq \sup(U_1 \cap [x_1, x_2]) = \xi$$

und weiter $x_2 \leq \xi$ implizieren. Hieraus und aus $\xi \in [x_1, x_2]$ würden wir $\xi = x_2 \in U_2$ erhalten, was ein Widerspruch zu $\xi \notin U_2$ ist. □

Sei (Y, d_Y) wieder ein weiterer metrischer Raum.

Satz 5.3.4 *Ist $f : X \to Y$ stetig und ist $M \subseteq X$ zusammenhängend, so ist auch das Bild $f(M) \subseteq Y$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ stetig, sei $M \subseteq X$ und sei $f(M) \subseteq Y$ nicht zusammenhängend. Dann existieren $V_1, V_2 \in \mathcal{O}(Y, d_Y)$ mit

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset\ , \quad f(M) \cap V_1 \neq \emptyset\ , \quad f(M) \cap V_2 \neq \emptyset \quad \text{und} \quad f(M) \subseteq V_1 \cup V_2\ .$$

Für $U_1 := f^{-1}(V_1)$ und $U_2 := f^{-1}(V_2)$ folgt daraus (5.3.1). Nach Satz 5.2.18 gilt außerdem $U_1, U_2 \in \mathcal{O}(X, d_X)$. Folglich ist M nicht zusammenhängend. Mittels der Kontrapositionsregel folgt die Behauptung. □

Eine wichtige Konsequenz der Sätze 5.3.3 und 5.3.4 ist

Satz 5.3.5 (Zwischenwertsatz) *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, sei $M \subseteq X$ zusammenhängend und seien $x_1, x_2 \in M$ derart, dass $f(x_1) < f(x_2)$. Dann existiert zu jedem $\xi \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) \leq \xi \leq f(x_2)$ ein $x \in M$ mit $f(x) = \xi$.*

Beweis. Da $M \subseteq X$ zusammenhängend ist, ist $f(M) \subseteq \mathbb{R}$ nach Satz 5.3.4 ebenfalls zusammenhängend und somit nach Satz 5.3.3 ein Intervall. Folglich gilt $[f(x_1), f(x_2)] \subseteq f(M)$, was gerade die Behauptung ist. □

Ein Spezialfall des Zwischenwertsatzes ist

Satz 5.3.6 (Nullstellensatz) *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, sei $M \subseteq X$ zusammenhängend und seien $x_1, x_2 \in M$ derart, dass $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Dann existiert ein $x \in M$ mit $f(x) = 0$.*

Beweis. Ist $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, so gilt $f(x_1) < 0 < f(x_2)$ oder $f(x_2) < 0 < f(x_1)$. Damit ist die Aussage eine direkte Folgerung aus Satz 5.3.5. □

Wir führen jetzt einen weiteren Zusammenhangsbegriff ein.

Definition 5.3.7 *Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt* **wegzusammenhängend** $:\Longleftrightarrow$ *Für alle $x_0, x_1 \in M$ existiert eine stetige Abbildung $\sigma : [0,1] \to X$ mit*

(1) *$\sigma([0,1]) \subseteq M$,*

(2) *$\sigma(0) = x_0$ und $\sigma(1) = x_1$.*

Die Abbildung σ wird dann **Weg in** M **von** x_0 **nach** x_1 *genannt.*

Beispiel 5.3.8 (i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend. Sind nämlich $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, so ist die Abbildung

$$\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^n , \quad \sigma(t) := (1-t)x_0 + tx_1 ,$$

ein Weg in $\mathbb{R}^n$ von x_0 nach x_1.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$, sei $x \in \mathbb{R}^n$ und seien $x_0, x_1 \in B_\varepsilon(x)$. Dann gilt für alle $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \|x - (1-t)x_0 - tx_1\| &= \|(1-t)(x-x_0) + t(x-x_1)\| \\ &\leq |1-t| \cdot \|x-x_0\| + |t| \cdot \|x-x_1\| \\ &\leq (1-t) \cdot \|x-x_0\| + t \cdot \|x-x_1\| \\ &< (1-t)\varepsilon + t\varepsilon \\ &= \varepsilon . \end{aligned}$$

Folglich ist σ, definiert wie in (i), ein Weg in $B_\varepsilon(x)$ von x_0 nach x_1. Also ist $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend.

□

Satz 5.3.9 *Ist $f : X \to Y$ stetig und ist $M \subseteq X$ wegzusammenhängend, so ist auch $f(M) \subseteq Y$ wegzusammenhängend.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ stetig, sei $M \subseteq X$ wegzusammenhängend und seien $y_0, y_1 \in f(M)$, d.h. $y_0 = f(x_0)$ und $y_1 = f(x_1)$ für gewisse $x_0, x_1 \in M$. Da M wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $\sigma : [0,1] \to X$ in M von x_0 nach x_1. Da f stetig ist und da die Verkettung stetiger Abbildungen wieder stetig ist (vgl. Satz 5.2.7), ist dann $f \circ \sigma : [0,1] \to Y$ ein Weg in $f(M)$ von y_0 nach y_1. Also ist $f(M)$ wegzusammenhängend. □

Satz 5.3.10 *Jede wegzusammenhängende Teilmenge $M \subseteq X$ ist zusammenhängend.*

Beweis. Nach den Sätzen 5.3.3 und 5.3.4 ist das Bild $\sigma([0,1])$ eines Weges $\sigma : [0,1] \to X$ eine zusammenhängende Teilmenge von X. Mit Hilfe dieses Faktes zeigt man, dass eine Teilmenge $M \subseteq X$, welche nicht zusammenhängend ist, auch nicht wegzusammenhängend ist. Die Einzelheiten verbleiben als Übung. □

Bemerkung 5.3.11 (i) Beispiel 5.3.8(ii) und Satz 5.3.10 implizieren, dass jede offene Kugel im $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist.

(ii) Wie man mit Hilfe von Satz 5.3.3 leicht sieht, gilt in $\mathbb{R}$ auch die Umkehrung von Satz 5.3.10. Somit ist eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ genau dann wegzusammenhängend, wenn sie zusammenhängend ist.

(iii) Bereits im $\mathbb{R}^2$ ist die Umkehrung von Satz 5.3.10 falsch. Zum Beispiel ist die Menge

$$\{(0,1)\} \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\left\{k^{-1}\right\} \times [0,1]\right) \subseteq \mathbb{R}^2$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

□

5.4 Weitere Eigenschaften stetiger Abbildungen

Seien weiterhin (X, d_X) und (Y, d_Y) irgendwelche metrische Räume.

Satz 5.4.1 *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in X$ und sei $f(a) \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung U von a mit*

$$f(x) \neq 0 \quad \textit{für alle} \quad x \in U\ .$$

Beweis. Sei $\varepsilon := |f(a)|$. Da f stetig in a ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f(a) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in B_\delta(a)\ .$$

Dann erfüllt $U := B_\delta(a)$ das Gewünschte. Aus $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$ erhält man nämlich

$$|f(x)| = |f(a) - (f(a) - f(x))| \geq |f(a)| - |f(a) - f(x)| = \varepsilon - |f(a) - f(x)| > 0\ .$$

□

Satz 5.4.2 *Seien $f_1, f_2 : X \to Y$ stetig, sei M eine dichte Teilmenge von X und gelte*

$$f_1\big|_M = f_2\big|_M\ . \tag{5.4.1}$$

Dann ist $f_1 = f_2$.

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig. Da M dicht in X ist, existiert nach Satz 3.4.17 eine Folge (x_k) in M mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Nach Satz 5.2.6 und wegen (5.4.1) gilt dann

$$f_1(x) = \lim_{k\to\infty} f_1(x_k) = \lim_{k\to\infty} f_2(x_k) = f_2(x) .$$

Folglich ist $f_1 = f_2$. $\square$

Der nächste Satz sagt aus, dass auch die Kompaktheit von Mengen unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt.

Satz 5.4.3 *Sei $f : X \to Y$ stetig und sei $M \subseteq X$ kompakt. Dann ist auch $f(M) \subseteq Y$ kompakt.*

Beweis. Sei (y_k) eine Folge in $f(M)$. Wir müssen zeigen, dass eine konvergente Teilfolge $\left(y_{k_j}\right)$ von (y_k) mit $\lim_{j\to\infty} y_{k_j} \in f(M)$ existiert. Dazu wählen wir zu jedem y_k ein $x_k \in M$ mit $f(x_k) = y_k$. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge (x_k) in M. Da M kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $\left(x_{k_j}\right)$ von (x_k) mit

$$x := \lim_{j\to\infty} x_{k_j} \in M .$$

Da f stetig ist, gilt dann für die Folge $\left(y_{k_j}\right)$

$$\lim_{j\to\infty} y_{k_j} = \lim_{j\to\infty} f\left(x_{k_j}\right) = f(x) \in f(M) .$$

$\square$

Wir definieren eine wichtige Klasse von Abbildungen in einen metrischen Raum Y.

Definition 5.4.4 *Sei M irgendeine nichtleere Menge. Eine Abbildung $f : M \to Y$ heißt* **beschränkt** $:\Longleftrightarrow$ *Der Wertebereich $f(M) \subseteq Y$ ist beschränkt.*

Satz 5.4.5 *Ist $f : X \to Y$ stetig und ist X kompakt, so ist f beschränkt.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ stetig und sei X kompakt. Dann ist $f(X)$ nach Satz 5.4.3 kompakt und somit nach Satz 3.7.4 insbesondere beschränkt. $\square$

Eine weitere Folgerung aus Satz 5.4.3 ist

Satz 5.4.6 (Satz von Weierstrass) *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und sei $M \subseteq X$ kompakt. Dann nimmt die Funktion f auf M ein Minimum und ein Maximum an. Das heißt, es existieren Punkte $x_1, x_2 \in M$ mit*

$$f(x_1) \le f(x) \quad \textit{und} \quad f(x_2) \ge f(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in M .$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\min f(M)$ und $\max f(M)$ existieren. Die Voraussetzungen implizieren nach Satz 5.4.3, dass $f(M)$ kompakt und somit nach Satz 3.7.4 abgeschlossen und beschränkt ist. Aus der Beschränktheit von $f(M)$ können wir schließen, dass $\inf f(M)$ und $\sup f(M)$ in $\mathbb{R}$ existieren. Da

$$\inf f(M) = \lim_{k\to\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sup f(M) = \lim_{k\to\infty} b_k$$

für gewisse Folgen (a_k) und (b_k) in $f(M)$ und da $f(M)$ abgeschlossen ist, folgt mit Satz 3.4.14, dass

$$\inf f(M) \in f(M) \quad \text{und} \quad \sup f(M) \in f(M) .$$

Folglich ist

$$\inf f(M) = \min f(M) \quad \text{und} \quad \sup f(M) = \max f(M) .$$

$\square$

Eine weitere Eigenschaft stetiger Abbildungen auf kompakten Räumen ist

Satz 5.4.7 *Ist $f : X \to Y$ stetig und ist X kompakt, so ist f sogar gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $f : X \to Y$ stetig und sei X kompakt. Angenommen, f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann existieren ein $\varepsilon_0 > 0$ und Punkte $x_k, x'_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$, mit

$$d_X(x_k, x'_k) \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty$$

und

$$d_Y(f(x_k), f(x'_k)) \geq \varepsilon_0 \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} . \tag{5.4.2}$$

Da X kompakt ist, also jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt, können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Folgen (x_k) und (x'_k) konvergent sind. Sei

$$a := \lim_{k\to\infty} x_k \quad \text{und} \quad a' := \lim_{k\to\infty} x'_k .$$

Wir haben dann

$$\lim_{k\to\infty} d_X(a, x_k) = \lim_{k\to\infty} d_X(a', x'_k) = \lim_{k\to\infty} d_X(x_k, x'_k) = 0 .$$

Außerdem gilt

$$d_X(a, a') \leq d_X(a, x_k) + d_X(x_k, x'_k) + d_X(a', x'_k) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} .$$

Es folgt $d_X(a, a') = 0$, d.h. $a = a'$. Da f stetig ist, erhalten wir

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a) \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} f(x'_k) = f(a) ,$$

d.h.

$$\lim_{k\to\infty} d_Y(f(a), f(x_k)) = \lim_{k\to\infty} d_Y(f(a), f(x'_k)) = 0 .$$

Dies impliziert wegen

$$d_Y(f(x_k), f(x'_k)) \leq d_Y(f(a), f(x_k)) + d_Y(f(a), f(x'_k)) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} ,$$

dass

$$\lim_{k\to\infty} d_Y(f(x_k), f(x'_k)) = 0 .$$

Das ist ein Widerspruch zu (5.4.2). Folglich muss f gleichmäßig stetig sein. □

5.5 Monotone Funktionen, der natürliche Logarithmus und die Zahl π

Definition 5.5.1 *Sei N eine nichtleere Menge reeller Zahlen und sei $f : N \to \mathbb{R}$.*

(i) *Die Funktion f heißt*

  (a) **monoton wachsend** $:\iff \forall\, x_1, x_2 \in N : (x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2))$,

  (b) **monoton fallend** $:\iff \forall\, x_1, x_2 \in N : (x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2))$,

  (c) **streng monoton wachsend** $:\iff \forall\, x_1, x_2 \in N : (x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$,

  (d) **streng monoton fallend** $:\iff \forall\, x_1, x_2 \in N : (x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2))$,

  (e) **monoton** $:\iff$ *f ist monoton fallend oder monoton wachsend.*

(ii) *Die Funktion f heißt (**streng**) **monoton** (**wachsend** bzw. **fallend**) **auf** $M \subseteq N :\iff f\big|_M$ ist (streng) monoton (wachsend bzw. fallend).*

Satz 5.5.2 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Dann gilt:*

(i) *Für alle $a \in I$ mit $a \neq \sup I$ ist $\lim_{x\to a+} f(x) = \inf f(I \cap]a, +\infty[)$.*

(ii) *Für alle $a \in I$ mit $a \neq \inf I$ ist $\lim_{x\to a-} f(x) = \sup f(I \cap]-\infty, a[)$.*

Beweis. (i) Sei $a \in I$ und $a \neq \sup I$. Dann haben wir

$$I \cap]a, +\infty[\neq \emptyset$$

und

$$f(a) \leq f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in I \cap]a, +\infty[\; .$$

Folglich existiert $c := \inf f(I \cap]a, +\infty[)$ in $\mathbb{R}$. Wir müssen zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ gibt, dass

$$|f(x) - c| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in I \cap]a, a + \delta[\; .$$

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Konstruktion von c existiert ein $x_0 \in I \cap]a, +\infty[$ mit

$$f(x_0) < c + \varepsilon \; .$$

Wir setzen $\delta := x_0 - a$. Ist dann $x \in I \cap]a, a + \delta[\; = I \cap]a, x_0[$, so folgt unter Benutzung der Monotonieeigenschaft von f

$$|f(x) - c| = f(x) - c \leq f(x_0) - c < \varepsilon \; .$$

(ii) Der Beweis verläuft analog. □

Folgerung 5.5.3 *Seien I und f wie in Satz 5.5.2. Dann ist f genau dann stetig, wenn $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend ist.*

Beweis. ($\Longrightarrow$) Sei f stetig. Da I zusammenhängend ist (vgl. Satz 5.3.3), ist dann nach Satz 5.3.4 auch $f(I)$ zusammenhängend.

($\Longleftarrow$) Sei f nicht stetig, d.h. f besitze eine Unstetigkeitsstelle $x_0 \in I$. Mittels Satz 5.5.2 leitet man ab, dass dann $f(I)$ nicht zusammenhängend ist. Die Ausführung der Einzelheiten verbleibt als Übung. □

Bemerkung 5.5.4 Satz 5.5.2 und Folgerung 5.5.3 gelten analog für monoton fallende Funktionen. □

Satz 5.5.5 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend). Dann gilt:*

(i) *Die inverse Funktion $f^{-1} : f(I) \to I$ existiert.*

(ii) *f^{-1} ist streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).*

(iii) *Ist f stetig, so ist auch f^{-1} stetig.*

Beweis. (i),(ii) Übung.

(iii) Das gilt nach (ii), Folgerung 5.5.3 und Bemerkung 5.5.4. □

Wir betrachten

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, , \quad f(x) := \exp(x) \; .$$

Diese Funktion ist nach Satz 4.5.4(iii) streng monoton wachsend. Also existiert $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Außerdem wissen wir, dass f stetig ist und dass

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

(vgl. Beispiel 5.2.10(iii) und Beispiel 5.1.20). Folglich ist $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

Definition 5.5.6 *Der* **natürliche Logarithmus** $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *ist die inverse Funktion von*

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x) \in \mathbb{R} \, .$$

Im nächsten Satz sind wesentliche Eigenschaften des natürlichen Logarithmus zusammengestellt.

Satz 5.5.7 (i) *Der natürliche Logarithmus* $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend und stetig.*

(ii) *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}_+$ *ist* $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$.

(iii) *Für alle* $x \in \mathbb{R}_+$ *ist* $\ln\left(x^{-1}\right) = -\ln(x)$.

(iv) *Es ist* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ *und* $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

(v) *Für jedes* $m \in \mathbb{N}$ *ist* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^m}{x} = 0$ *und* $\lim\limits_{x \to 0} x\,(\ln(x))^m = 0$.

Beweis. Die Aussagen folgen aus Satz 5.5.5 und den entsprechenden Aussagen für die Exponentialfunktion. Zum Beispiel gilt nach Beispiel 5.1.20 für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^m}{x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{(\ln(\exp(y)))^m}{\exp(y)} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^m}{\exp(y)} = 0 \, .$$

□

Sei $a \in \mathbb{R}_+$. Durch direktes Nachrechnen überprüft man, dass

$$a^q = \exp(q \ln(a)) \quad \text{für alle} \quad q \in \mathbb{Q} \, .$$

Somit ist die folgende Definition eine Verallgemeinerung von Definition 2.6.15.

Definition 5.5.8 *Für* $a \in \mathbb{R}_+$ *und* $z \in \mathbb{C}$ *ist*

$$a^z := \exp(z \ln(a)) \, .$$

Aus Definition 5.5.8 erhält man unmittelbar, dass

$$\ln\left(a^x\right) = x \ln(a) \quad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{R}_+ \text{ und } x \in \mathbb{R} \, . \tag{5.5.1}$$

Jetzt können wir zeigen:

Satz 5.5.9 *Es ist* $\exp(1) = \mathrm{e}$.

Beweis. Es ist (Beweis als Übung)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1 \, .$$

Mit (5.5.1) und der Substitution $y = \exp(x) - 1$ folgt

$$\lim_{y \to 0} \ln\left((1+y)^{1/y}\right) = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\exp(x) - 1} = 1 \, ,$$

was aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{y \to 0} (1+y)^{1/y} = \exp(1)$$

liefert. Somit gilt insbesondere

$$\mathrm{e} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \exp(1)\ .$$

$\square$

Eine einfache Folgerung aus Definition 5.5.8 und Satz 5.5.9 ist, dass

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}\ .$$

Unser nächstes Ziel ist die Definition der Zahl π. Dazu stellen wir die folgenden Überlegungen an.

Lemma 5.5.10 *Für alle* $x \in\,]0,2]$ *gilt:*

(i) $\cos(x) < 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$,

(ii) $\sin(x) > 0$.

Beweis. (i) Wir benutzen die Potenzreihendarstellung der Cosinus-Funktion (vgl. Satz 4.5.6). Danach ist

$$\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) = \sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = -\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4l+2}}{(4l+2)!} - \frac{x^{4l+4}}{(4l+4)!}\right)\ .$$

Dies und die Tatsache, dass für $x \in\,]0,2]$ und $l \in \mathbb{N}$

$$\frac{x^{4l+2}}{(4l+2)!} - \frac{x^{4l+4}}{(4l+4)!} = \frac{x^{4l+2}}{(4l+2)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4l+3)(4l+4)}\right) > 0\ ,$$

liefern die behauptete Ungleichung.

(ii) Wie bei (i) zeigt man, dass

$$\sin(x) > x - \frac{x^3}{2} \quad \text{für alle} \quad x \in\,]0,2]\ .$$

Hieraus folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 5.5.11 *Der Cosinus ist auf dem Intervall* $[0,2]$ *streng monoton fallend.*

Beweis. Aus den Additionstheoremen für Cosinus und Sinus (vgl. Satz 4.5.9) leitet man ab, dass

$$\cos(x_1) - \cos(x_2) = 2\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\sin\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) \quad \text{für alle} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ . \tag{5.5.2}$$

Seien $x_1, x_2 \in [0,2]$ und gelte $x_1 < x_2$. Dann ist

$$\frac{x_2 - x_1}{2} \in\,]0,2] \quad \text{und} \quad \frac{x_2 + x_1}{2} \in\,]0,2]\ ,$$

woraus man mit Lemma 5.5.10(ii) und (5.5.2)

$$\cos(x_1) - \cos(x_2) > 0\ , \quad \text{d.h.} \quad \cos(x_1) > \cos(x_2)$$

erhält. $\square$

Satz 5.5.12 (i) *Es existiert genau ein* $x_0 \in [0,2]$ *mit* $\cos(x_0) = 0$.

(ii) *Für dieses* x_0 *gilt* $\sin(x_0) = 1$.

Beweis. (i) Die Abbildung $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x) \in \mathbb{R}$ ist stetig und $[0,2] \subseteq \mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Außerdem ist $\cos(0) = 1$ und, nach Lemma 5.5.10(i), $\cos(2) < -1/3$. Mit dem Nullstellensatz (Satz 5.3.6) folgt, dass mindestens ein $x_0 \in [0,2]$ mit $\cos(x_0) = 0$ existiert. Nach Lemma 5.5.11 existiert höchstens ein solches x_0. Also gibt es genau ein $x_0 \in [0,2]$ mit $\cos(x_0) = 0$.

(ii) Ist $x_0 \in [0,2]$ und gilt $\cos(x_0) = 0$, so folgt mit Satz 4.5.9(i) und Lemma 5.5.10(ii), dass $\sin^2(x_0) = 1$ und $\sin(x_0) > 0$, also $\sin(x_0) = 1$. □

Definition 5.5.13 *Wir definieren die reelle Zahl* π *durch*

$$\pi := 2\,x_0\ ,$$

wobei x_0 *durch* $x_0 \in [0,2]$ *und* $\cos(x_0) = 0$ *bestimmt ist.*

Satz 5.5.14 (i) *Es ist*

$$\exp\left(\frac{\pi \mathrm{i}}{2}\right) = -\exp\left(\frac{3\pi \mathrm{i}}{2}\right) = \mathrm{i} \quad \textit{und} \quad \exp(2\pi\mathrm{i}) = -\exp(\pi\mathrm{i}) = 1\ .$$

(ii) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\exp\left(z + \frac{\pi \mathrm{i}}{2}\right) = \mathrm{i}\exp(z) \quad \textit{und} \quad \exp(z + 2\pi\mathrm{i}) = -\exp(z + \pi\mathrm{i}) = \exp(z)\ .$$

Beweis. Nach der Eulerschen Formel (Satz 4.5.9(iv)) und Satz 5.5.12 ist

$$\exp\left(\frac{\pi \mathrm{i}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}\ .$$

Die restlichen Beziehungen folgen mittels Satz 4.5.2(ii). □

Für den Cosinus und den Sinus erhalten wir:

Satz 5.5.15 (i) *Es ist*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin(\pi) = \sin(2\pi) = 0$$

und

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\cos(\pi) = \cos(2\pi) = 1\ .$$

(ii) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$-\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(z + \pi) = \sin(z + 2\pi) = \sin(z)$$

und

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(z + \pi) = \cos(z + 2\pi) = \cos(z)\ .$$

Beweis. Das ergibt sich aus Definition 4.5.5 und Satz 5.5.14. □

Satz 5.5.16 *Es ist*

$$\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \textit{und} \quad \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \ .$$

Beweis. Nach Definition von π und wegen $\cos(-x) = \cos(x)$ ist $\pi/2$ die einzige Nullstelle des Cosinus im Intervall $]-\pi/2, \pi/2]$. Hieraus erhält man mittels $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ und $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ die erste der behaupteten Gleichungen. Die zweite Gleichung folgt wegen $\sin(x) = -\cos(x + \pi/2)$ aus der ersten. □

Folgerung 5.5.17 *Es ist* $\{z \in \mathbb{C} : \exp(z) = 1\} = \{2\pi k\mathrm{i} : k \in \mathbb{Z}\}$.

Beweis. Sei $z = x + y\,\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und gelte $\exp(z) = 1$. Dann haben wir

$$1 = \exp(z) = \exp(x)(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)).$$

Dies impliziert

$$1 = |\exp(z)| = |\exp(x)| \cdot |\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)| = \exp(x)\sqrt{\cos^2(y) + \sin^2(y)} = \exp(x).$$

Also ist $x = 0$. Ferner folgt $\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y) = 1$, d.h. $\cos(y) = 1$ und $\sin(y) = 0$, was nach Satz 5.5.16 und wegen $\cos((2k+1)\pi) = \cos(\pi) = -1$ für $k \in \mathbb{Z}$ nur dann gilt, wenn $y = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Andererseits gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\exp(2\pi k\mathrm{i}) = (\exp(2\pi\mathrm{i}))^k = 1^k = 1 \ .$$

□

Folgerung 5.5.18 *Die Funktionen* $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *und* $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *haben nur reelle Nullstellen.*

Beweis. Nach Folgerung 5.5.17 gilt für $z \in \mathbb{C}$

$$\sin(z) = 0 \iff \exp(\mathrm{i}z) = \exp(-\mathrm{i}z) \iff \exp(2\mathrm{i}z) = 1 \iff z \in \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \ .$$

Dies liefert wegen $\cos(z) = \sin(z + \pi/2)$ auch die Aussage für den Cosinus. □

Wir wollen jetzt noch die Arcus-Funktionen definieren. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned}
f_1 : \quad [0, \pi] \quad &\to \mathbb{R} \ , \quad f_1(x) := \cos(x) \ , \\
f_2 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\to \mathbb{R} \ , \quad f_2(x) := \sin(x) \ , \\
f_3 : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \ , \quad f_3(x) := \tan(x) \ .
\end{aligned}$$

Die Funktion f_1 ist nach Lemma 5.5.11 auf $[0, \pi/2]$ streng monoton fallend. Ferner gilt nach Satz 5.5.15(ii)

$$\cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Somit ist f_1 auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton fallend. Wegen

$$f_2(x) = -f_1\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{für alle} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ist dann f_2 streng monoton wachsend. Weiter folgt, dass f_3 auf $[0, \pi/2[$ streng monoton wachsend ist, was wegen

$$f_3(-x) = -f_3(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

impliziert, dass f_3 überall streng monoton wachsend ist. Die Funktionen f_1, f_2, f_3 sind stetig. Außerdem haben wir

$$f_1(0) = f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{und} \quad f_1(\pi) = f_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

sowie

$$\lim_{x\to-\pi/2+} f_3(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\pi/2-} f_3(x) = +\infty\ .$$

Folglich ist

$$f_1([0,\pi]) = f_2\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1,1] \quad \text{und} \quad f_3\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}\ .$$

Die obigen Betrachtungen rechtfertigen

Definition 5.5.19 *Der* **Arcuscosinus** $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ *ist die inverse Funktion von*

$$x \in [0,\pi] \mapsto \cos(x) \in [-1,1]\ .$$

Der **Arcussinus** $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$ *ist die inverse Funktion von*

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \mapsto \sin(x) \in [-1,1]\ .$$

Schließlich ist der **Arcustangens** $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\pi/2,\pi/2\right[$ *die inverse Funktion von*

$$x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \tan(x) \in \mathbb{R}\ .$$

Bemerkung 5.5.20 Nach Satz 5.5.5 sind die Arcus-Funktionen stetig. Der Arcuscosinus ist streng monoton fallend, der Arcussinus und der Arcustangens sind streng monoton wachsend. □

5.6 Konvergenz von Folgen von Abbildungen

Sei im Folgenden M eine beliebige nichtleere Menge und seien (X, d_X) und (Y, d_Y) wieder irgendwelche metrischen Räume. Wir suchen nach einem geeigneten Konvergenzbegriff für Folgen von Abbildungen, der sichert, dass der Grenzwert einer Folge von beschränkten bzw. stetigen Abbildungen wieder beschränkt bzw. stetig ist. Zunächst kann man die Konvergenz einer Folge von Abbildungen mit Werten in einen metrischen Raum wie folgt definieren.

Definition 5.6.1 *Sei (f_k) eine Folge von Abbildungen $f_k : M \to Y$ und sei $f : M \to Y$. Die Folge (f_k)* **konvergiert punktweise gegen** f *:⟺ Für jedes $x \in M$ konvergiert die Folge $(f_k(x))$ gegen $f(x)$, d.h.*

$$\forall\, x \in M\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, k \geq k_0 : d_Y(f_k(x), f(x)) < \varepsilon\ .$$

Konvergiert (f_k) punktweise gegen f, so schreiben wir $f_k \to f$ (für $k \to \infty$).

Wie das folgende Beispiel zeigt, leistet die punktweise Konvergenz noch nicht das Gewünschte.

Beispiel 5.6.2 (i) Sei $f_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ durch

$$f_k(x) := \begin{cases} k & \text{für} \quad 0 < x \leq k^{-1} \\ x^{-1} & \text{für} \quad x > k^{-1} \end{cases}$$

definiert. Dann ist $f_k(\mathbb{R}_+) = \left]0,k\right]$. Also ist jede der Abbildungen f_k beschränkt. Desweiteren konvergiert (f_k) punktweise gegen die Funktion $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^{-1} \in \mathbb{R}$. Diese Funktion hat den Wertbereich $\mathbb{R}$ und ist somit nicht beschränkt.

(ii) Wir betrachten die Folge (f_k) der Funktionen

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad f_k(x) := x^k\,.$$

Diese Folge konvergiert punktweise gegen

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad x = 1 \end{cases}\,.$$

Obwohl also jedes f_k stetig ist, ist die Grenzfunktion f im Punkt 1 unstetig.

□

Wir benötigen demnach einen stärkeren Konvergenzbegriff.

Definition 5.6.3 *Seien (f_k) und f wie in Definition 5.6.1. Die Folge (f_k)* **konvergiert gleichmäßig gegen** f $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,k_0 \in \mathbb{N}\,\forall\,x \in M\,\forall\,k \ge k_0 : d_Y(f_k(x), f(x)) < \varepsilon\,.$$

Konvergiert (f_k) gleichmäßig gegen f, so schreiben wir $f_k \rightrightarrows f$ (für $k \to \infty$).

Offensichtlich gilt

Satz 5.6.4 *Seien (f_k) und f wie in Definition 5.6.1. Konvergiert die Folge (f_k) gleichmäßig gegen f, so konvergiert sie auch punktweise gegen f.* □

Wir verifizieren jetzt, dass der gleichmäßige Grenzwert einer Folge beschränkter bzw. stetiger Abbildungen tatsächlich beschränkt bzw. stetig ist.

Satz 5.6.5 *Seien $f_k : M \to Y$, $k \in \mathbb{N}$, beschränkt und konvergiere die Folge (f_k) gleichmäßig gegen $f : M \to Y$. Dann ist auch f beschränkt.*

Beweis. Wegen $f_k \rightrightarrows f$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d_Y(f_{k_0}(x), f(x)) < 1 \quad \text{für alle} \quad x \in M\,.$$

Da f_{k_0} nach Voraussetzung beschränkt ist, existieren ein $b \in Y$ und eine reelle Zahl $c > 0$ derart, dass

$$d_Y(f_{k_0}(x), b) \le c \quad \text{für alle} \quad x \in M\,.$$

Es folgt, dass

$$d_Y(f(x), b) \le d_Y(f(x), f_{k_0}(x)) + d_Y(f_{k_0}(x), b) \le 1 + c \quad \text{für alle} \quad x \in M\,.$$

Also ist $f(M)$ und somit f beschränkt. □

Satz 5.6.6 *Seien $f_k : X \to Y$, $k \in \mathbb{N}$, stetig und konvergiere die Folge (f_k) gleichmäßig gegen $f : X \to Y$. Dann ist auch f stetig.*

Beweis. Seien $a \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass ein $\delta > 0$ mit

$$d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in B_\delta(a)$$

existiert. Wegen $f_k \rightrightarrows f$ existiert zunächst ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$d_Y(f_{k_0}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle} \quad x \in X\,.$$

Da f_{k_0} stetig in a ist, existiert weiter ein $\delta > 0$ mit

$$d_Y(f_{k_0}(x), f_{k_0}(a)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle} \quad x \in B_\delta(a) \; .$$

Folglich haben wir für alle $x \in B_\delta(a)$

$$d_Y(f(x), f(a)) \le d_Y(f(x), f_{k_0}(x)) + d_Y(f_{k_0}(x), f_{k_0}(a)) + d_Y(f_{k_0}(a), f(a)) < \varepsilon \; .$$

□

Satz 5.6.6 kann man wie folgt als Vertauschbarkeit von Grenzwerten formulieren.

Folgerung 5.6.7 *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.6.6 gilt*

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_k(x)\right) \quad \textit{für alle} \quad a \in X \; . \tag{5.6.1}$$

Beweis. Nach den Voraussetzungen gilt

$$\lim_{x\to a} f_k(x) = f_k(a) \quad \text{für alle} \quad a \in X \quad \text{und alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X \; .$$

Setzt man diese Beziehungen in (5.6.1) ein, so erhält man

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{für alle} \quad a \in X \; ,$$

was gerade bedeutet, dass f stetig ist. Die Behauptung ergibt sich somit aus Satz 5.6.6. □

Als Folgen von Abbildungen haben wir insbesondere die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ von Abbildungen $f_k : M \to \mathbb{C}^n$. Dabei bedeutet das Symbol $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ in Analogie zu Definition 4.1.1 die Folge (s_j) der Abbildungen

$$s_j := \sum_{k=1}^{j} f_k : M \to \mathbb{C}^n \; .$$

Die wichtigste Klasse von Reihen von Abbildungen bilden die Potenzreihen.

Satz 5.6.8 *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\rho > 0$*. Für jedes* $R \in \,]0, \rho[$ *konvergiert* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)$ *auf* $B_R(z_0)$ *gleichmäßig, d.h. die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ *der Abbildungen*

$$f_k : B_R(z_0) \to \mathbb{C} \; , \quad f_k(z) := a_k(z-z_0)^k \; ,$$

konvergiert gleichmäßig gegen die Abbildung

$$f : B_R(z_0) \to \mathbb{C} \; , \quad f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \; .$$

Beweis. Sei $R \in]0, \rho[$, seien f_k und f wie im Satz angegeben und sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{j} f_k(z) \right| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad z \in B_R(z_0) \quad \text{und alle} \quad j \geq j_0$$

existiert. Da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \rho$, also insbesondere für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = R$ absolut konvergiert, ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| R^k$ konvergent. Somit existiert ein solches $j_0 \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} |a_k| R^k < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad j \geq j_0.$$

Mit Hilfe von Satz 4.1.9 folgt, dass für alle $z \in B_R(z_0)$ und alle $j \geq j_0$

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{j} f_k(z) \right| = \left| \sum_{k=j+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=j+1}^{\infty} |a_k| \cdot |z - z_0|^k \leq \sum_{k=j+1}^{\infty} |a_k| R^k < \varepsilon \, .$$

□

Die Sätze 5.6.6 und 5.6.8 implizieren

Satz 5.6.9 *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\rho > 0$*, sei* $U := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$ *und sei* $f : U \to \mathbb{C}$ *durch*

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

definiert. Dann ist f *stetig.*

Beweis. Sei $a \in U$ beliebig. Wir wählen $R \in]0, \rho[$ derart, dass $a \in B_R(z_0)$. Aus der Tatsache, dass

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{k=0}^{j} a_k(z - z_0)^k \in \mathbb{C}$$

für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ stetig ist, folgt mit den Sätzen 5.6.6 und 5.6.8, dass $f\big|_{B_R(z_0)}$ stetig in a ist. Da $B_R(z_0)$ offen in U ist, ist dann auch f stetig in a. □