Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Benedict Meinke, Dr. Stefan Rosemann, Dr. Norman Zergänge

Vorbereitungsblatt

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2020

Aufgabe V.1 (Überprüfung von Axiomen)**.** Sei $\mathcal{E} = \mathbb{Z}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x,y \in \mathbb{Z}\}$. Sei $\mathcal{G}$ das System aller Durchschnitte $\mathbf{g} \cap \mathcal{E}$ von Geraden $\mathbf{g}$ der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ mit $\mathcal{E}$, so dass $\mathbf{g} \cap \mathcal{E}$ mindestens zwei verschiedene Punkte enthält. Sei die Relation $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ die Einschränkung der Zwischenrelation von $\mathbb{E}^2$ auf $\mathcal{E}$. Überprüfen Sie,

(a) ob für die Inzidenzebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ das Parallelenaxiom gilt;

(b) ob für $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{Z})$ das Anordnungsaxiom **(A2)** gilt;

(c) ob für $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{Z})$ das Anordnungsaxiom **(A4)** gilt.

Aufgabe V.2 (Hilbertebenen)**.** Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ eine Hilbertebene. Sei $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$, sei $\mathbf{P} \in \mathcal{E} \setminus \mathbf{g}$ und sei $\mathbf{L_P}$ der Lotfußpunkt von $\mathbf{P}$ auf $\mathbf{g}$. Seien weiter $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{E}$ in allgemeiner Lage mit folgenden Eigenschaften:

- Die Strecken $\overline{\mathbf{AB}}$ und $\overline{\mathbf{PL_P}}$ sind kongruent.
- Der Winkel $\angle_{\mathbf{ABC}}$ ist ein rechter Winkel.

(a) Man beweise, daß mindestens zwei verschiedene Punkte $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbf{g}$ derart existieren, dass $\angle_{\mathbf{L_P Q}_j\mathbf{P}} \equiv \angle_{\mathbf{BCA}}$ für $j = 1, 2$.

(b) Man beweise, dass es genau zwei Punkte $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbf{g}$ wie in Teil (a) gibt.

Aufgabe V.3 (Berechnungen in $\mathbb{E}^2$)**.** Betrachten Sie das Dreieck $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ in $\mathbb{E}^2$ mit $\mathbf{A} = (-1, 1)$, $\mathbf{B} = (-3, 3)$ und $\mathbf{C} = (-1, -3)$.

(a) Berechnen Sie den Mittelpunkt $\mathbf{M}_{\text{um}}$ des Umkreises K_{um} von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$.

(b) Berechnen Sie die Höhenfußpunkte $\mathbf{H}_b$ und $\mathbf{H}_c$ zu $\mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{C}$.

(c) Finden Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\mathbf{g} = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : ax + by = 1\}$ die Tangente von K_{um} durch $\mathbf{A}$ ist.

Aufgabe V.4 (Satz des Thales und Sehnensatz)**.** Sei $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ein spitzwinkliges Dreieck in $\mathbb{E}^2$. Die Punkte $\mathbf{H}_a$, $\mathbf{H}_b$ und $\mathbf{H}_c$ seien die Höhenfußpunkte zu $\mathbf{A}$, zu $\mathbf{B}$ bzw. zu $\mathbf{C}$. Der Schnittpunkt $\mathbf{H}$ der Höhen teilt die Strecken $\overline{\mathbf{AH}_a}$, $\overline{\mathbf{BH}_b}$ und $\overline{\mathbf{CH}_c}$ in zwei Abschnitte. Beweisen Sie, dass das Produkt der Längen dieser Abschnitte für alle drei Höhen gleich ist.

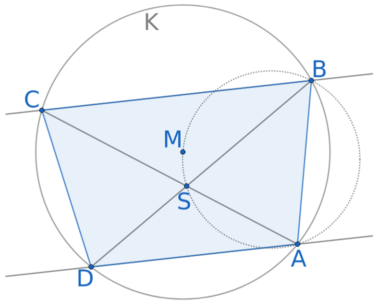
Aufgabe V.5 (Strahlensätze)**.** Sei $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ein Dreieck in $\mathbb{E}^2$. Seien $\mathbf{D}$ und $\mathbf{E}$ Punkte auf den Seiten $\overline{\mathbf{AB}}$ bzw. $\overline{\mathbf{BC}}$, so dass $\frac{|\overline{\mathbf{AD}}|}{|\overline{\mathbf{BD}}|} = \frac{|\overline{\mathbf{CE}}|}{|\overline{\mathbf{BE}}|} = \frac{3}{2}$. Außerdem sei $\mathbf{P}$ ein Punkt auf der Seite $\overline{\mathbf{AC}}$ und $\mathbf{Q}$ der Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{BP}$ und $\mathbf{DE}$. Dabei ist $|\overline{\mathbf{AC}}| = 10$ und $|\overline{\mathbf{DQ}}| = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Geraden $\mathbf{AC}$ und $\mathbf{DE}$ parallel sind.

(b) Berechnen Sie $|\overline{\mathbf{EQ}}|$.

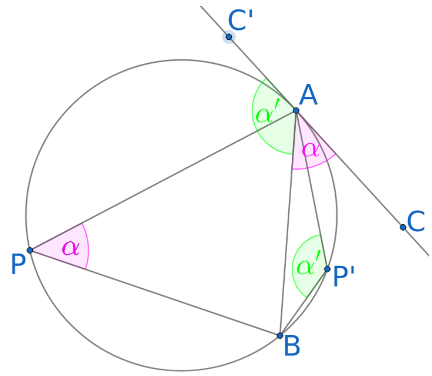
Aufgabe V.6 (Kreis- und Peripheriewinkelsatz)**.** (a) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P} \in \mathbb{E}^2$ paarweise verschiedene Punkte auf einem Kreis K. Sei $\mathbf{P'} \in \mathbb{E}^2$ ein Punkt mit $\mathbf{P'} \in [\mathbf{P}]_{\mathbf{AB}}$ und $\angle_{\mathbf{APB}} \equiv \angle_{\mathbf{AP'B}}$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{P'} \in K$.

(b) Sei $\square_{\mathbf{ABCD}}$ ein Viereck mit Eckpunkten auf einem Kreis K. Sei $\mathbf{M}$ der Mittelpunkt von K. Sei $\mathbf{S}$ der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{\mathbf{AC}}$ und $\overline{\mathbf{BD}}$ und gelte $\mathbf{AD}||\mathbf{BC}$. Zeigen Sie, dass die Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{M}, \mathbf{S}$ auf einem Kreis liegen.

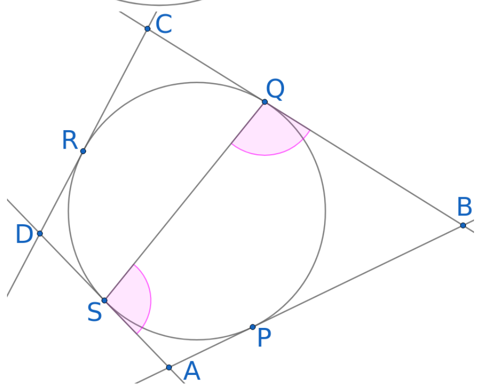


Aufgabe V.7 (Kreis- und Peripheriewinkelsatz)**.**

(a) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}$ paarweise verschiedene Punkte auf einem Kreis K und sei $\mathbf{C}$ ein Punkt auf der Tangenten von K durch $\mathbf{A}$ mit $[\mathbf{C}]_{\mathbf{AB}} \neq [\mathbf{P}]_{\mathbf{AB}}$. Zeigen Sie $\angle_{\mathbf{APB}} \equiv \angle_{\mathbf{BAC}}$.



(b) Gegeben seien vier Punkte $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}$ auf einem Kreis K, so dass sich die Tangenten $\mathbf{t_P}, \mathbf{t_Q}, \mathbf{t_R}, \mathbf{t_S}$ an K durch diese vier Punkte in vier weiteren Punkten $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ schneiden. Dabei gelte $\{\mathbf{A}\} = \mathbf{t_S} \cap \mathbf{t_P}$, $\{\mathbf{B}\} = \mathbf{t_P} \cap \mathbf{t_Q}$, $\{\mathbf{C}\} = \mathbf{t_Q} \cap \mathbf{t_R}$, $\{\mathbf{D}\} = \mathbf{t_R} \cap \mathbf{t_S}$. Man zeige $\angle_{\mathbf{BQS}} \equiv \angle_{\mathbf{ASQ}}$.



Aufgabe V.8 (Konstruktionen mit Zirkel und Lineal)**.** Gegeben sind zwei verschiedene Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{E}^2$. Beschreiben Sie, wie man allein mit einem Zirkel einen Punkt $\mathbf{C}$ und einen Punkt $\mathbf{D}$ aus $\mathbb{E}^2$ konstruieren kann, so dass

- $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ein gleichseitiges Dreieck ist;
- $\angle_{\mathbf{BAD}}$ ein rechter Winkel ist.