Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Benedict Meinke, Dr. Stefan Rosemann, Dr. Norman Zergänge

# Übungsblatt 9

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2020

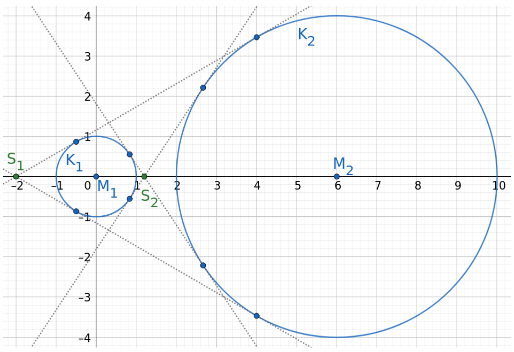
**Aufgabe 9.1.** (a) Sei $\Delta_{ABC}$ ein rechtwinkliges Dreieck. Man zeige, dass die Mittelsenkrechten der Katheten, die Hypothenuse im Mittelpunkt schneiden. (5 Punkte)

(b) Seien $\Delta_{ABC}$ ein Dreieck, $D$ ein Punkt zwischen $B$ und $C$ und $E$ der Schnittpunkt von $AC$ und der Parallelen von $AB$ durch $D$. Sei $M$ der Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Man zeige, dass der Schnittpunkt $M'$ von $\overline{CM}$ und $\overline{DE}$ der Mittelpunkt von $\overline{DE}$ ist. (5 Punkte)

**Aufgabe 9.2.** In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ seien eine Gerade $\mathbf{g} \subseteq \mathbb{E}^2$ und Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{E}^2 \setminus \mathbf{g}$ gegeben, so dass $[\mathbf{A}]_\mathbf{g} = [\mathbf{B}]_\mathbf{g}$ und die Lotfußpunkte $\mathbf{L_A}, \mathbf{L_B} \in \mathbf{g}$ von $\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{B}$ auf $\mathbf{g}$ verschieden voneinander sind. Sei $\mathbf{C}$ der Schnittpunkt von $\overline{\mathbf{AL_B}}$ und $\overline{\mathbf{BL_A}}$ und $\mathbf{L_C}$ der Lotfußpunkt von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{g}$. Es gelte $|\overline{\mathbf{AL_A}}| = 3$ und $|\overline{\mathbf{BL_B}}| = 5$. Berechnen Sie $|\overline{\mathbf{CL_C}}|$.
(10 Punkte)

**Aufgabe 9.3.**

Sei $K_1$ der Kreis um $\mathbf{M}_1 = (0,0)$ vom Radius $r_1 = 1$ und $K_2$ der Kreis um $\mathbf{M}_2 = (6,0)$ vom Radius $r_2 = 4$, siehe Bild. Bestimmen Sie die Schnittpunkte $S_1, S_2$ der gemeinsamen Tangenten von $K_1$ und $K_2$ mit der $x$-Achse.
(10 Punkte)




**Aufgabe 9.4.** Sei $\phi_{\mathbf{Z},\lambda} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ die zentrische Streckung mit Streckzentrum $\mathbf{Z} \in \mathbb{E}^2$ und Streckfaktor $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $\phi_{\mathbf{Z},\lambda}(\mathbf{P}) = \mathbf{Z} + \lambda(\mathbf{P} - \mathbf{Z})$ für alle $\mathbf{P} \in \mathbb{E}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass $\phi_{\mathbf{Z},\lambda} \circ \phi_{\mathbf{Z},\mu} = \phi_{\mathbf{Z},\lambda\mu}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sowie $\phi^{-1}_{\mathbf{Z},\lambda} = \phi_{\mathbf{Z},1/\lambda}$ für $\lambda \neq 0$.
(2 Punkte)

Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{E}^2$ und bezeichne $\mathbf{A}' = \phi_{\mathbf{Z},\lambda}(\mathbf{A})$, $\mathbf{B}' = \phi_{\mathbf{Z},\lambda}(\mathbf{B})$ und $\mathbf{C}' = \phi_{\mathbf{Z},\lambda}(\mathbf{C})$.

(b) Zeigen Sie $\mathbf{B}' - \mathbf{A}' = \lambda(\mathbf{B} - \mathbf{A})$, $\langle \mathbf{A}' - \mathbf{B}', \mathbf{C}' - \mathbf{B}' \rangle = \lambda^2 \langle \mathbf{A} - \mathbf{B}, \mathbf{C} - \mathbf{B} \rangle$ und $|\overline{\mathbf{A}'\mathbf{B}'}| = |\lambda||\overline{\mathbf{AB}}|$ (falls $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ und $\lambda \neq 0$). (2 Punkte)

(c) Sei $\lambda \neq 0$ und $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ nicht kollinear. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$ nicht kollinear sind und $\angle_{\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}'} \equiv \angle_{\mathbf{ABC}}$. (3 Punkte)

(d) Betrachte Dreiecke $\Delta_{\mathbf{ABC}}, \Delta_{\mathbf{A}''\mathbf{B}''\mathbf{C}''}$ in $\mathbb{E}^2$ mit $\frac{b''}{b} = \frac{c''}{c}$ und $\angle_{\mathbf{BAC}} \equiv \angle_{\mathbf{B}''\mathbf{A}''\mathbf{C}''}$. Beweisen Sie mit Hilfe der zentrischen Streckung, dass $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ und $\Delta_{\mathbf{A}''\mathbf{B}''\mathbf{C}''}$ ähnlich sind.
(3 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Es sind Gruppenabgaben von bis zu 3 Studierenden erlaubt.
- Versehen Sie jede Ihrer Abgaben mit Name, Vorname, Matrikelnummer und E-Mail-Adresse aller an der Abgabe Beteiligten.
- Die Einreichung erfolgt bitte nur in Form einer einzelnen PDF-Datei durch eine der an der Abgabe beteiligten Personen.
- Als Dateinamen ihrer Abgabe wählen Sie bitte **09-Matrikelnummer**, wobei „**Matrikelnummer**“ die Matrikelnummer der/des Einreichenden ist.
- Bitte reichen Sie Ihre Lösungen bis spätestens **08:00 am Montag, 06.07.2020**, unter dem im Stud.IP zu findenden Upload-Link ein.
- Die Studienleistung erbringen Sie durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.