Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Benedict Meinke, Dr. Stefan Rosemann, Dr. Norman Zergänge

Übungsblatt 8

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2020

Aufgabe 8.1. Zeigen Sie, dass in einer Hilbertebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ die folgenden Aussagen gelten.

(a) Sei $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$ eine Gerade und $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{E} \setminus \mathbf{g}$ zwei Punkte mit $\mathbf{B} \notin [\mathbf{A}]_{\mathbf{g}}$. Außerdem sei $\mathbf{h} \in \mathcal{G}$ eine Parallele zu $\mathbf{g}$ durch $\mathbf{B}$. Dann ist $\mathbf{C} \in [\mathbf{A}]_{\mathbf{h}}$ für jeden Punkt $\mathbf{C} \in \mathbf{g}$. (5 Punkte)

(b) Zu endlich vielen Punkten $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n \in \mathcal{E}$ existiert eine Gerade $\mathbf{g}$ derart, dass $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ auf derselben Seite von $\mathbf{g}$ liegen. (5 Punkte)

Aufgabe 8.2. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ eine Hilbertebene.

(a) Zeigen Sie, dass zu jeder Geraden $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$ und jedem Punkt $\mathbf{A} \in \mathcal{G}$ mit $\mathbf{A} \notin \mathbf{g}$ genau ein Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{A}$ existiert, der $\mathbf{g}$ als Tangente hat. (5 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass jeder Kreis $K \subseteq \mathcal{E}$ unendlich viele Punkte enthält. (5 Punkte)

Aufgabe 8.3. In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte $\mathbf{M} = (3,3)$ und $\mathbf{A} = (4,2)$ und den Kreis $K = K(\mathbf{M}, \overline{\mathbf{MA}})$.

(a) Untersuchen Sie für jede der Geraden

$$\mathbf{g}_1 = (1,0) + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = (8,1) + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_3 = (3,1) + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},$$

ob sie eine Passante, Tangente oder Sekante von K ist. (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass auch $\mathbf{B} = (4,4)$ auf K liegt, und berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Tangenten von K durch $\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{B}$. (3 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass durch den Punkt $\mathbf{C} = (-1,1)$ genau zwei Tangenten von K verlaufen, und berechnen Sie die Berührpunkte dieser beiden Tangenten mit K. (4 Punkte)

Aufgabe 8.4. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ eine Hilbertebene.

(a) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1 \in \mathcal{E}$ mit $\mathbf{B}_0$ der Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{AB}_1}$, $\mathbf{C}_1$ der Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{AC}_0}$ und $\mathbf{B}_0|\mathbf{C}_0|\mathbf{B}_1$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}|\mathbf{C}_1|\mathbf{B}_0$. (4 Punkte)

Sei nun $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ sogar eine absolute Geometrie (d.h. es gelten zusätzlich die Vollständigkeitsaxiome **(V1)** und **(V2)**). Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{E}$ mit $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{C}$. Betrachten Sie die Folge $(\mathbf{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}$, iterativ definiert durch die Bedingungen, dass $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}$ und $\mathbf{C}_{n+1}$ der Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{AC}_n}$ ist. Sei $(\mathbf{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge aus $\mathcal{E}$, iterativ definiert durch die Bedingungen $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}$, $\mathbf{A}|\mathbf{B}_n|\mathbf{B}_{n+1}$ und $\overline{\mathbf{B}_n\mathbf{B}_{n+1}} \equiv \overline{\mathbf{AB}}$.

(b) Zeigen Sie, dass es eine kleinste Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, mit der Eigenschaft, dass $\mathbf{A}|\mathbf{C}|\mathbf{B}_{n_0}$. (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie (z.B. durch Induktion über die Zahl n_0 aus (b)), dass ein $m_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mathbf{A}|\mathbf{C}_{m_0}|\mathbf{B}$. (4 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Es sind Gruppenabgaben von bis zu 3 Studierenden erlaubt.
- Versehen Sie jede Ihrer Abgaben mit Name, Vorname, Matrikelnummer und E-Mail-Adresse aller an der Abgabe Beteiligten.
- Die Einreichung erfolgt bitte nur in Form einer einzelnen PDF-Datei durch eine der an der Abgabe beteiligten Personen.
- Als Dateinamen ihrer Abgabe wählen Sie bitte **08-Matrikelnummer**, wobei „**Matrikelnummer**" die Matrikelnummer der/des Einreichenden ist.
- Bitte reichen Sie Ihre Lösungen bis spätestens **08:00 am Montag, 29.06.2020**, unter dem im Stud.IP zu findenden Upload-Link ein.
- Die Studienleistung erbringen Sie durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.