Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Benedict Meinke, Dr. Stefan Rosemann, Dr. Norman Zergänge

Übungsblatt 6

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2020

Aufgabe 6.1. (a) In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte

$$\mathbf{A}_1 = (-2, 0),\ \mathbf{B}_1 = (1, 4),\ \mathbf{C}_1 = (2, -3),\ \mathbf{A}_2 = (-6, 9),\ \mathbf{B}_2 = (-3, 5),\ \mathbf{C}_2 = (-7, 2)$$

$$\mathbf{A}_3 = (-1, 2),\ \mathbf{B}_3 = (1, 1),\ \mathbf{C}_3 = (1, -1).$$

Untersuchen Sie, welche der Dreiecke $\Delta_{\mathbf{A_1B_1C_1}}$, $\Delta_{\mathbf{A_2B_2C_2}}$, $\Delta_{\mathbf{A_3B_3C_3}}$ zueinander kongruent sind. (5 Punkte)

(b) In der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$ betrachten wir die Punkte

$$\mathbf{A}_1 = 1{+}i,\ \mathbf{B}_1 = 1{+}\frac{1}{\sqrt{2}}{+}i\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mathbf{C}_1 = 1{+}2i,\ \mathbf{A}_2 = 1{+}4i,\ \mathbf{B}_2 = 1{+}2\sqrt{2}{+}i2\sqrt{2},\ \mathbf{C}_2 = 1{+}8i$$

$$\mathbf{A}_3 = 1 + 4i,\ \mathbf{B}_3 = 1 - 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2},\ \mathbf{C}_3 = 1 + 2i,$$

Untersuchen Sie, welche der Dreiecke $\Delta_{\mathbf{A_1B_1C_1}}$, $\Delta_{\mathbf{A_2B_2C_2}}$, $\Delta_{\mathbf{A_3B_3C_3}}$ zueinander kongruent sind. (5 Punkte)

Aufgabe 6.2. (a) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{A}', \mathbf{B}'$ Punkte einer Hilbertebene mit $\mathbf{A}|\mathbf{P}|\mathbf{B}$ und $\overline{\mathbf{AB}} \equiv \overline{\mathbf{A'B'}}$. Nach Satz 3.2.2 gibt es einen eindeutigen Punkt $\mathbf{P}' \in \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{A}', \mathbf{B}')$ mit $\overline{\mathbf{A'P'}} \equiv \overline{\mathbf{AP}}$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}'|\mathbf{P}'|\mathbf{B}'$ und $\overline{\mathbf{B'P'}} \equiv \overline{\mathbf{BP}}$. (5 Punkte)

(b) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ drei nicht kollineare Punkte einer Hilbertebene und sei $\mathbf{P} \in \overline{\mathbf{AB}} \setminus \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$. Dabei gelte $\overline{\mathbf{AC}} \equiv \overline{\mathbf{BC}}$ und $\angle_{\mathbf{ACP}} \equiv \angle_{\mathbf{BCP}}$. Zeigen Sie, dass $\overline{\mathbf{AP}} \equiv \overline{\mathbf{BP}}$ und dass die Winkel $\angle_{\mathbf{APC}}$ und $\angle_{\mathbf{BPC}}$ rechte Winkel sind. (5 Punkte)

Aufgabe 6.3. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot), \equiv)$ eine Hilbert-Ebene und $\mathbf{S} \in \mathcal{E}$. Wir definieren die *Punktspiegelung* $\Phi_{\mathbf{S}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ wie folgt: Es gelte

$$\Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{S}) = \mathbf{S} \quad \text{und} \quad \Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}' \quad \text{für } \mathbf{P} \neq \mathbf{S},$$

wobei $\mathbf{P}'$ der (nach Satz 3.2.2) eindeutig bestimmte Punkt mit $\mathbf{P}|\mathbf{S}|\mathbf{P}'$ und $\overline{\mathbf{SP}} \equiv \overline{\mathbf{SP'}}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$ genau dann, wenn $\mathbf{P} = \mathbf{S}$. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi_{\mathbf{S}}(\Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P})) = \mathbf{P}$ für alle $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$. (2 Punkte)

(c) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{E}$ verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathbf{A}' = \Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{A})$ und $\mathbf{B}' = \Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{B})$ verschieden sind und $\overline{\mathbf{A'B'}} \equiv \overline{\mathbf{AB}}$ gilt. (3 Punkte)

(d) Zeigen Sie, dass im affinen Modell $\mathbb{E}^2$ der euklidischen Ebene eine Punktspiegelung $\Phi_{\mathbf{S}}$ durch die Formel

$$\Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P}) = -\mathbf{P} + 2\mathbf{S}$$

gegeben ist. (3 Punkte)

Aufgabe 6.4. Sei $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ein Dreieck in einer Hilbert-Ebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot), \equiv)$ mit $\angle_{\mathbf{CAB}} \equiv \angle_{\mathbf{CBA}}$. Zeigen Sie, dass $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ gleichschenklig mit Basis $\overline{\mathbf{AB}}$ ist. (10 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Es sind Gruppenabgaben von bis zu 3 Studierenden erlaubt.
- Versehen Sie jede Ihrer Abgaben mit Name, Vorname, Matrikelnummer und E-Mail-Adresse aller an der Abgabe Beteiligten.
- Die Einreichung erfolgt bitte nur in Form einer einzelnen PDF-Datei durch eine der an der Abgabe beteiligten Personen.
- Als Dateinamen ihrer Abgabe wählen Sie bitte **06-Matrikelnummer**, wobei „**Matrikelnummer**“ die Matrikelnummer der/des Einreichenden ist.
- Bitte reichen Sie Ihre Lösungen bis spätestens **08:00 am Montag, 15.06.2020**, unter dem im Stud.IP zu findenden Upload-Link ein.
- Die Studienleistung erbringen Sie durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.