Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Benedict Meinke, Dr. Stefan Rosemann, Dr. Norman Zergänge

Übungsblatt 5

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2020

Aufgabe 5.1. In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte $\mathbf{A} = (2,3)$, $\mathbf{B} = (2,1)$, $\mathbf{C} = (5,4)$, $\mathbf{D} = (1,7)$ und $\mathbf{E} = (-1,-2)$.

(a) Berechnen Sie die Winkelmaße $\measuredangle_{\mathbf{ABC}}$ und $\measuredangle_{\mathbf{DAE}}$ der Winkel $\angle_{\mathbf{ABC}}$ und $\angle_{\mathbf{DAE}}$ und stellen Sie fest, ob $\angle_{\mathbf{ABC}} \equiv \angle_{\mathbf{DAE}}$ gilt. (5 Punkte)

(b) Bestimmen Sie den Punkt $\mathbf{F}$ mit der Eigenschaft, dass $\angle_{\mathbf{ABF}} \equiv \angle_{\mathbf{DAE}}$, $\overline{\mathbf{BF}} \equiv \overline{\mathbf{BC}}$ und $(\mathbf{C}, \mathbf{F})|_{\mathbf{AB}}$. (5 Punkte)

Aufgabe 5.2. Betrachten Sie die Metrik $\mathrm{d}_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf dem $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $\mathrm{d}_1(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$ für $\mathbf{P} = (p_1, p_2), \mathbf{Q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$. In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ definieren wir wie folgt eine Streckenkongruenz. Für zwei Strecken $\overline{\mathbf{AB}}$ und $\overline{\mathbf{CD}}$ gilt $\overline{\mathbf{AB}} \equiv \overline{\mathbf{CD}}$ genau dann, wenn $\mathrm{d}_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathrm{d}_1(\mathbf{C}, \mathbf{D})$. Für die Kongruenz von Winkeln benutzen wir den üblichen Kongruenzbegriff in $\mathbb{E}^2$ (d.h. zwei Winkel sind genau dann kongruent, wenn ihre Winkelmaße übereinstimmen). Zeigen Sie, dass die angeordnete Inzidenzebene $\mathbb{E}^2$ zusammen mit dieser Strecken- und Winkelkonguenz $\equiv$

(a) den Kongruenzaxiomen **(K1)**, **(K2)** und **(K3)** genügt, (5 Punkte)

(b) das Kongruenzaxiom **(K6)** nicht erfüllt. (5 Punkte)

Aufgabe 5.3. Im Halbebenenmodell $\mathbb{H}^2$ der hyperbolischen Ebene betrachten wir die Punkte $\mathbf{A} = i$, $\mathbf{B} = 4i$, $\mathbf{A}' = 1 + 2i$, $\mathbf{P} = 1 + 3i$.

(a) Ermitteln Sie den Punkt $\mathbf{B}' \in \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{A}', \mathbf{P})$, so dass $\overline{\mathbf{AB}} \equiv \overline{\mathbf{A'B'}}$. (5 Punkte)

(b) Ermitteln Sie den Mittelpunkt $\mathbf{M}$ der Strecke $\overline{\mathbf{AB}}$, d.h. den Punkt $\mathbf{M}$, welcher $\mathbf{A}|\mathbf{M}|\mathbf{B}$ und $\overline{\mathbf{AM}} \equiv \overline{\mathbf{BM}}$ erfüllt. (5 Punkte)

(Zur Erinnerung: In $\mathbb{H}^2$ gilt $\overline{\mathbf{AB}} \equiv \overline{\mathbf{A'B'}} :\Leftrightarrow \mathrm{d}_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathrm{d}_{\mathbb{H}^2}(\mathbf{A}', \mathbf{B}')$, wobei $\mathrm{d}_{\mathbb{H}^2}$ die Abstandsfunktion aus Aufgabe 5.4 ist.)

Aufgabe 5.4. Sei $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ eine Abbildung wie in Aufgabe 1.4, d.h. f ist von der Gestalt $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{d}_{\mathbb{H}^2}(f(z), f(w)) = \mathrm{d}_{\mathbb{H}^2}(z, w) \quad \forall z, w \in \mathbb{H}^2,$$

wobei

$$\mathrm{d}_{\mathbb{H}^2}(z, w) := \log \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right)$$

die Abstandsfunktion in $\mathbb{H}^2$ ist. (10 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Es sind Gruppenabgaben von bis zu 3 Studierenden erlaubt.
- Versehen Sie jede Ihrer Abgaben mit Name, Vorname, Matrikelnummer und E-Mail-Adresse aller an der Abgabe Beteiligten.
- Die Einreichung erfolgt bitte nur in Form einer einzelnen PDF-Datei durch eine der an der Abgabe beteiligten Personen.
- Als Dateinamen ihrer Abgabe wählen Sie bitte **05-Matrikelnummer**, wobei „**Matrikelnummer**“ die Matrikelnummer der/des Einreichenden ist.
- Bitte reichen Sie Ihre Lösungen bis spätestens **08:00 am Montag, 08.06.2020**, unter dem im Stud.IP zu findenden Upload-Link ein.
- Die Studienleistung erbringen Sie durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.