Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Benedict Meinke, Dr. Stefan Rosemann, Dr. Norman Zergänge

Übungsblatt 2

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2020

Aufgabe 2.1. Bezeichne $\mathbb{E}^2$ das affine Modell der euklidischen Ebene. Betrachten Sie die euklidische Abstandsfunktion $\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sqrt{(A_1-B_1)^2+(A_2-B_2)^2}$ für Punkte $\mathbf{A}=(A_1,A_2)$, $\mathbf{B}=(B_1,B_2)$ aus $\mathbb{E}^2$.

(a) Seien $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in\mathbb{E}^2$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{C}$ genau dann gilt, wenn $\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{C}) = \mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{B})+\mathrm{d}(\mathbf{B},\mathbf{C})$. (5 Punkte)

(b) Seien $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}\in\mathbb{E}^2$ vier Punkte mit $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{C}$ und $\mathbf{A}|\mathbf{C}|\mathbf{D}$. Zeigen Sie mit (a), dass dann auch $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{D}$ und $\mathbf{B}|\mathbf{C}|\mathbf{D}$. (5 Punkte)

Aufgabe 2.2. Betrachten Sie die relativen euklidischen Geometrien $\mathbb{E}^2|_M$ für die Mengen

(a) $M = \mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Z}^2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\notin\mathbb{Z} \text{ oder } y\notin\mathbb{Z}\}$, (5 Punkte)

(b) $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\leq\sin(x)\}$, (5 Punkte)

zusammen mit der Einschränkung $\mathcal{Z}\subseteq M\times M\times M$ der Zwischenrelation von $\mathbb{E}^2$. Untersuchen Sie jeweils, welche der Anordnungsaxiome **(A1)**–**(A4)** von $(\mathbb{E}^2|_M,\mathcal{Z})$ erfüllt werden.

Aufgabe 2.3. Sei $(\mathcal{E},\mathcal{G},\cdot|\cdot|\cdot)$ eine angeordnete Inzidenzebene und sei $\mathbf{P}\in\mathcal{E}$ beliebig. Betrachten Sie $(\mathcal{E}_0,\mathcal{G}_0)$ mit $\mathcal{E}_0=\mathcal{E}\setminus\{\mathbf{P}\}$ und $\mathcal{G}_0=\{\mathbf{g}\cap\mathcal{E}_0 : \mathbf{g}\in\mathcal{G}\}$ zusammen mit der Einschränkung $\mathcal{Z}\subseteq\mathcal{E}_0\times\mathcal{E}_0\times\mathcal{E}_0$ der Zwischenrelation von $(\mathcal{E},\mathcal{G},\cdot|\cdot|\cdot)$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{E}_0,\mathcal{G}_0)$ eine Inzidenzebene ist. (5 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{E}_0,\mathcal{G}_0,\mathcal{Z})$ keine angeordnete Inzidenzebene ist. (5 Punkte)

Aufgabe 2.4. Wir betrachten den Restklassenkörper $\mathbb{F}_5=\{0,1,2,3,4\}$ als eine Gerade auf der die Punkte $0,1,2,3,4$ liegen. Wir definieren eine dreistellige Relation $\cdot|\cdot|\cdot$ auf $\mathbb{F}_5$: Für $a,b,c\in\mathbb{F}_5$ gelte $a|b|c$ genau dann, wenn $a\neq c$ und $b=3(a+c)$.

(a) Überprüfen Sie, dass $\cdot|\cdot|\cdot$ den Anordnungsaxiomen **(A1)**–**(A3)** genügt. (5 Punkte)

(b) Finden Sie $a,b,c,d\in\mathbb{F}_5$ derart, dass $a|b|c$ und $b|c|d$ gilt, aber nicht $a|b|d$. (5 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Es sind Gruppenabgaben von bis zu 3 Studierenden erlaubt.
- Versehen Sie jede Ihrer Abgaben mit Name, Vorname, Matrikelnummer und E-Mail-Adresse aller an der Abgabe Beteiligten.
- Die Einreichung erfolgt bitte nur in Form einer einzelnen PDF-Datei durch eine der an der Abgabe beteiligten Personen.
- Als Dateinamen ihrer Abgabe wählen Sie bitte **02-Matrikelnummer**, wobei „**Matrikelnummer**" die Matrikelnummer des/der Einreichenden ist.
- Bitte reichen Sie Ihre Lösungen bis spätestens 08:00 am Donnerstag, 07.05.2020, unter dem im Stud.IP zu findenden Upload-Link ein.
- Die Studienleistung erbringen Sie durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.