Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Benedict Meinke, Dr. Stefan Rosemann, Dr. Norman Zergänge

# Übungsblatt 1

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2020

**Aufgabe 1.1.** Betrachten Sie die folgenden Mengen $\mathcal{E}$ und Teilmengen $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E})$.

(a) $\mathcal{E} = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{G} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{1, n\}, \{2, 3, \ldots, n\}\}$ (wobei $n \geq 3$).

(b) $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{G} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{1, 5\}\}$.

(c) $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) : X \text{ enthält genau 3 Elemente}\}$.

(d) $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$, $\mathcal{G} = \{\mathbf{g} \cap \mathcal{E} : \mathbf{g} \text{ ist eine euklidische Gerade und } \mathbf{g} \cap \mathcal{E} \neq \emptyset\}$.

(e) $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$, $\mathcal{G} = \{\mathbf{g} \cap \mathcal{E} : \mathbf{g} \text{ ist eine euklidische Gerade und } \mathbf{g} \cap \mathcal{E} \neq \emptyset\}$.

Entscheiden Sie jeweils, ob es sich bei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ um eine Inzidenzebene handelt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. (je 2 Punkte)

**Aufgabe 1.2.** Sei $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4\}$. Bestimmen Sie alle Geradensysteme $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E})$, so dass $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ zu einer Inzidenzebene wird. (10 Punkte)

**Aufgabe 1.3.** Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Inzidenzebene mit mindestens vier Elementen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ mindestens vier verschiedene Geraden enthält. (10 Punkte)

**Aufgabe 1.4.** Wir betrachten das Halbebenenmodell $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ der hyperbolischen Ebene.

(a) Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbf{g} = \{z \in \mathbb{H}^2 : \alpha|z|^2 + 2\beta \mathrm{Re}(z) + \gamma = 0\}$$

entweder leer, ganz $\mathbb{H}^2$ oder eine hyperbolische Gerade ist. Zeigen Sie auch, dass jede hyperbolische Gerade von der Gestalt wie $\mathbf{g}$ ist. (4 Punkte)

(b) Zu reellen Zahlen $a, b, c, d$ mit $ad - bc = 1$ betrachten wir die Abbildung $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ eine Bijektion ist. (3 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f$ wie in (b) hyperbolische Geraden auf hyperbolische Geraden abbildet. (3 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Gruppenabgaben von maximal drei Studierenden sind erlaubt.
- Bitte versehen Sie Ihre Lösung mit Namen, Matrikelnummer und E-Mail-Adresse aller Abgebenden.
- Bitte reichen Sie Ihre Lösungen bis spätestens 08:00 am Donnerstag, 30.04.2020, unter dem Upload-Link ... ein.
- Pro abgebende Gruppe
- Die Studienleistung erbringen Sie durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.