Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Lösungen zum Übungsblatt 12 (Bonusblatt)

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 1. In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte $\mathbf{M} = (3, 5)$ und $\mathbf{A} = (15, 10)$ und den Kreis $K = K(\mathbf{M}, \overline{\mathbf{MA}})$. Untersuchen Sie für jede der Geraden

(a) $\mathbf{g} = (-2, -7) + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{h} = (-4, 22) + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$, (c) $\mathbf{k} = (-11, -10) + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ob sie eine Passante, Tangente oder Sekante von K ist und berechnen Sie gegebenenfalls die Schnittpunkte der Geraden mit K. (10 Punkte)

- Lösung (a):
  - Zunächst eine Vorbemerkung, die auch für die Teile (b) und (c) wichtig sein wird: Der Kreis K ist durch die Gleichung
    $$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 169$$
    gegeben. Die Schnittpunkte ergeben sich aus der Lösung der Gleichung
    $$(17t-5)^7 + (7t-12)^2 = 169,$$
    welche sich zu $338t^2 - 338t = 0$ vereinfacht. Diese besitzt die Lösungen $t = 0$ und $t = 1$, also sind die Schnittpunkte $(-2, -7)$ und $(15, 0)$. Bei $\mathbf{g}$ handelt es sich folglich um eine Sekante.
- Lösung (b):
  - Die Schnittpunkte ergeben sich aus der Gleichung
    $$(-12t-7)^2 + (5t+17)^2 = 169.$$
    Diese vereinfacht sich zu $169t^2 + 338t + 169 = 0$, also $t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 = 0$. Also gibt es genau einen Schnittpunkt, nämlich $(8, 17)$. Folglich handelt es sich bei $\mathbf{h}$ um eine Tangente.
- Lösung (c):
  - Die Schnittpunkte ergeben sich aus der Gleichung
    $$(t-14)^2 + (-t-15)^2 = 169.$$
    Diese vereinfacht sich zu $2t^2 + 2t + 252 = 0$ und besitzt offenbar keine reellen Lösungen. Somit schneidet $\mathbf{k}$ den Kreis K nicht und ist somit eine Passante.

Aufgabe 2. (a) Sei $\square_{\mathbf{ABCD}}$ ein einfaches Viereck in $\mathbb{E}^2$, dessen Eckpunkte auf einem Kreis mit Radius r liegen und dessen Diagonalen $\overline{\mathbf{AC}}$ und $\overline{\mathbf{BD}}$ sich senkrecht schneiden. Zeigen Sie die Gleichung
$$|\overline{\mathbf{AB}}|^2 + |\overline{\mathbf{BC}}|^2 + |\overline{\mathbf{CD}}|^2 + |\overline{\mathbf{AD}}|^2 = 8r^2.$$
(4 Punkte)

(b) Sei $\Box_{\mathbf{ABCD}}$ ein einfaches Viereck in $\mathbb{E}^2$ mit Eckpunkten auf einem Kreis K. Sei $\mathbf{S}$ der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{\mathbf{AC}}$ und $\overline{\mathbf{BD}}$ und seien $\mathbf{AD}$ und $\mathbf{BC}$ nicht parallel mit Schnittpunkt $\mathbf{R}$. Sei außerdem der Mittelpunkt $\mathbf{M}$ von K in $\overline{\mathbf{AB}}$ enthalten. Zeigen Sie, dass $\mathbf{RS} \perp \mathbf{AB}$. (3 Punkte)

(c) In $\mathbb{E}^2$ sei ein Dreieck $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ gegeben. Der Radius r des Umkreises von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ betrage $\sqrt{8}$. Außerdem gelte $|\overline{\mathbf{AB}}| = 4$ und $\measuredangle_{\mathbf{CAB}} = 60°$. Berechnen Sie $\measuredangle_{\mathbf{ACB}}$ und $|\overline{\mathbf{BC}}|$. (3 Punkte)

- Lösung (a):
  - Sei $\mathbf{M}$ der Mittelpunkt des Kreises K. Setze

$$\sigma = \frac{1}{2}\measuredangle_{\mathbf{AMB}} \quad \delta = \frac{1}{2}\measuredangle_{\mathbf{CMD}}.$$

  - Aus dem Sinussatz für rechtwinklige Dreiecke folgt

$$\sin(\sigma) = \frac{\frac{1}{2}|\overline{\mathbf{AB}}|}{r} \quad \text{bzw.} \quad |\overline{\mathbf{AB}}| = 2r\sin(\sigma).$$

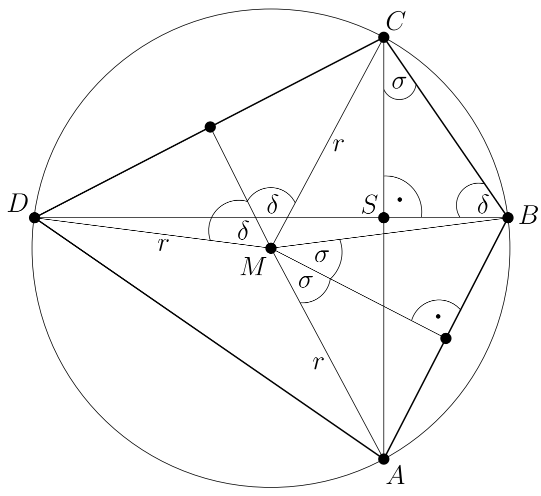
    Analog folgt für die gegenüberliegende Seite $\overline{\mathbf{CD}}$, dass

$$|\overline{\mathbf{CD}}| = 2r\sin(\delta).$$

  - Sei $\mathbf{S}$ der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{\mathbf{AC}}$ und $\overline{\mathbf{BD}}$. Wegen dem Kreiswinkelsatz gilt

$$\sigma = \measuredangle_{\mathbf{ACB}} = \measuredangle_{\mathbf{SCB}} \quad \text{und} \quad \delta = \measuredangle_{\mathbf{DBC}} = \measuredangle_{\mathbf{SBC}}.$$

    Siehe auch untenstehendes Bild:



  - Andererseits folgt aus dem Winkelsummensatz im rechtwinkligen Dreieck $\Delta_{\mathbf{BCS}}$, dass

$$\measuredangle_{\mathbf{SCB}} + \measuredangle_{\mathbf{SBC}} = 90°$$

    also

$$\delta = 90° - \sigma.$$

- Somit ist
$$|\overline{\mathbf{CD}}| = 2r\sin(90^\circ - \sigma) = 2r\cos(\sigma)$$
und daher (mit $1 = \sin^2(\sigma) + \cos^2(\sigma)$)
$$|\overline{\mathbf{AB}}|^2 + |\overline{\mathbf{CD}}|^2 = 4r^2\sin^2(\sigma) + 4r^2\cos^2(\sigma) = 4r^2.$$
- Analog folgt $|\overline{\mathbf{BC}}|^2 + |\overline{\mathbf{AD}}|^2 = 4r^2$. Addition der beiden Gleichungen liefert das gewünschte Resultat.

• Lösung (b):

- Weil $\overline{\mathbf{AB}}$ ein Durchmesser des Kreises K ist, gilt nach dem Satz des Thales, dass
$$\measuredangle_{\mathbf{ADB}} = \measuredangle_{\mathbf{ACB}} = 90^\circ.$$
- Somit sind $\overline{\mathbf{AC}}$ und $\overline{\mathbf{BD}}$ zwei Höhen im Dreieck $\Delta_{\mathbf{ABR}}$ mit Höhenfußpunkten $\mathbf{C}$ bzw. $\mathbf{D}$.
- Durch den Höhenschnittpunkt $\mathbf{S}$ im Dreieck $\Delta_{\mathbf{ABR}}$ verläuft auch noch die dritte Höhelinie durch den Eckpunkt $\mathbf{R}$. Damit stimmt diese mit $\mathbf{RS}$ überein – $\mathbf{RS}$ steht also insbesondere senkrecht auf $\mathbf{AB}$.

• Lösung (c):

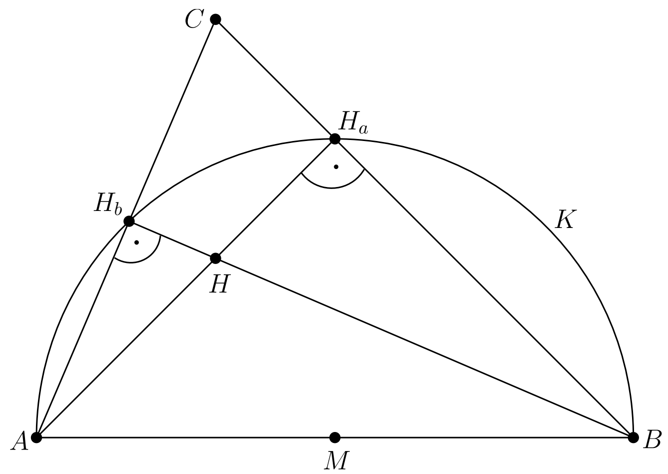
- Sei $\mathbf{M}$ der Mittelpunkt des Umkreises von $\Delta_{\mathbf{ABC}}$. Im Dreieck $\Delta_{\mathbf{AMB}}$ sind alle Seitenlängen bekannt: $|\overline{\mathbf{AB}}| = 4$ und $|\overline{\mathbf{AM}}| = |\overline{\mathbf{BM}}| = \sqrt{8}$. Mit dem Kosinussatz folgt daher
$$16 = 4^2 = \sqrt{8}^2 + \sqrt{8}^2 - 2\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}\cos(\measuredangle_{\mathbf{AMB}}) = 16 - 16\cos(\measuredangle_{\mathbf{AMB}}),$$
also $\cos(\measuredangle_{\mathbf{AMB}}) = 0$. Daraus folgern wir $\measuredangle_{\mathbf{AMB}} = 90^\circ$.
- Nach dem Kreiswinkelsatz kommen somit für $\measuredangle_{\mathbf{ACB}}$ nur die Werte
$$\measuredangle_{\mathbf{ACB}} = 45^\circ \quad \text{oder} \quad \measuredangle_{\mathbf{ACB}} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$
in Frage. Da aber $\measuredangle_{\mathbf{BAC}} = 60^\circ$, muss nach dem Winkelsummensatz notwendigerweise
$$\measuredangle_{\mathbf{ACB}} = 45^\circ$$
gelten.
- Mit dem Sinussatz folgt nun
$$|\overline{\mathbf{BC}}| = \sin(\measuredangle_{\mathbf{BAC}})\frac{|\overline{\mathbf{AB}}|}{\sin(\measuredangle_{\mathbf{ACB}})} = \sin(60^\circ)\frac{4}{\sin(45^\circ)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 4 = 2\sqrt{6}.$$

Aufgabe 3. (a) Gegeben seien zwei Sekanten $\mathbf{g}_{\mathbf{S},\vec{v}}, \mathbf{g}_{\mathbf{S},\vec{w}}$ eines Kreises K durch einen gemeinsamen Punkt $\mathbf{S}$ im Äusseren des Kreises. Die Schnittpunkte von K mit $\mathbf{g}_{\mathbf{S},\vec{v}}$ seien $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, diejenigen von $\mathbf{g}_{\mathbf{S},\vec{w}}$ mit K seien $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$. Zeigen Sie mit dem Ähnlichkeitssatz und dem Kreiswinkelsatz, dass $|\overline{\mathbf{SA}_1}||\overline{\mathbf{SA}_2}| = |\overline{\mathbf{SB}_1}||\overline{\mathbf{SB}_2}|$. (5 Punkte)

(b) Sei $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ein spitzwinkliges Dreieck in $\mathbb{E}^2$. Die Punkte $\mathbf{H}_c \in \overline{\mathbf{AB}}$, $\mathbf{H}_a \in \overline{\mathbf{BC}}$ und $\mathbf{H}_b \in \overline{\mathbf{AC}}$ seien die Fußpunkte der Höhe von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{AB}$, von $\mathbf{A}$ auf $\mathbf{BC}$ bzw. von $\mathbf{B}$ auf $\mathbf{AC}$. Der Schnittpunkt $\mathbf{H}$ der Höhen teilt die Strecken $\overline{\mathbf{AH}_a}$, $\overline{\mathbf{BH}_b}$ und $\overline{\mathbf{CH}_c}$ in zwei Abschnitte. Beweisen Sie, dass das Produkt der Längen dieser Abschnitte für alle drei Höhen gleich ist. (5 Punkte)

- Lösung (a):
  - Wir gehen davon aus, dass $\mathbf{S}|\mathbf{A}_1|\mathbf{A}_2$ und $\mathbf{S}|\mathbf{B}_1|\mathbf{B}_2$.
  - Der Kreiswinkelsatz bezüglich der Sehne $\overline{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1}$ liefert
  $$\measuredangle_{\mathbf{SA}_2\mathbf{B}_1} = \measuredangle_{\mathbf{SB}_2\mathbf{A}_1}.$$
  Außerdem gilt ohnehin
  $$\measuredangle_{\mathbf{A}_2\mathbf{SB}_1} = \measuredangle_{\mathbf{B}_2\mathbf{SA}_1}.$$
  - Nach dem Winkelsummensatz stimmen auch die dritten Winkel in den Dreiecken $\Delta_{\mathbf{SA}_2\mathbf{B}_1}$ und $\Delta_{\mathbf{SB}_2\mathbf{A}_1}$ überein:
  $$\measuredangle_{\mathbf{SB}_1\mathbf{A}_2} = \measuredangle_{\mathbf{SA}_1\mathbf{B}_2}.$$
  - Damit sind nach dem Ähnlichkeitssatz $\Delta_{\mathbf{SA}_2\mathbf{B}_1}$ und $\Delta_{\mathbf{SB}_2\mathbf{A}_1}$ ähnlich. Insbesondere gilt
  $$\frac{|\overline{\mathbf{SA}_2}|}{|\overline{\mathbf{SB}_2}|} = \frac{|\overline{\mathbf{SB}_1}|}{|\overline{\mathbf{SA}_1}|} \quad \text{bzw.} \quad |\overline{\mathbf{SA}_1}||\overline{\mathbf{SA}_2}| = |\overline{\mathbf{SB}_1}||\overline{\mathbf{SB}_2}|$$
  was zu zeigen war.

- Lösung (b):
  - Wir betrachten den Kreis K mit Mittelpunkt $\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ und Radius $\frac{1}{2}|\overline{\mathbf{AB}}|$, d.h. K ist der Thaleskreis über $\overline{\mathbf{AB}}$, siehe auch untenstehendes Bild:

  Per Definition und nach dem Satz des Thales gilt
  $$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{H}_a, \mathbf{H}_b \in K.$$

– Damit sind $\overline{\mathbf{BH}_b}$ und $\overline{\mathbf{AH}_a}$ Sehnen von K, die sich im Punkt $\mathbf{H}$ schneiden. Der Sehnensatz besagt dann

$$|\overline{\mathbf{HA}}||\overline{\mathbf{HH}_a}| = |\overline{\mathbf{HB}}||\overline{\mathbf{HH}_b}|.$$

– Analog zeigt man

$$|\overline{\mathbf{HA}}||\overline{\mathbf{HH}_a}| = |\overline{\mathbf{HC}}||\overline{\mathbf{HH}_c}|.$$

Das war zu zeigen.

Aufgabe 4. (a) Sei $\mathbf{A} = (-4,-2)$ und $\mathbf{B} = (4,-2)$. Bestimmen Sie einen Punkt $\mathbf{C} \in \mathbb{E}^2$ mit der Eigenschaft, dass die Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ die Eckpunkte eines Dreiecks in $\mathbb{E}^2$ sind, dessen Umkreismittelpunkt der Nullpunkt und dessen Euler-Gerade parallel zur Seite $\overline{\mathbf{AB}}$ ist. (5 Punkte)

(b) Sei $\mathbf{A} = (-3,0)$ und $\mathbf{B} = (3,0)$. Bestimmen Sie einen Punkt $\mathbf{C} \in \mathbb{E}^2$ mit der Eigenschaft, dass die Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ nicht kollinear sind und $\mathbf{C}$ der Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises des Dreiecks $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ist. (5 Punkte)

- Lösung (a):

  – Wir schreiben $\mathbf{C} = (x_0, y_0)$. Die Euler-Gerade ist die Gerade durch den Umkreismittelpunkt $(0,0)$ und den Schwerpunkt $\mathbf{S} = \frac{1}{3}(\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \frac{1}{3}(x_0, y_0-4)$. Nun ist $(1,0)$ ein Richtungsvektor der Geraden $\mathbf{AB}$. Also muß der Richtungsvektor (x_0, y_0-4) der Euler-Geraden die Bedingung $y_0 = 4$ erfüllen. Die Mittelsenkrechte der Punkte $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$ ist also durch die Gleichung

  $$(x+4)^2 + (y+2)^2 = (x-x_0)^2 + (y-4)^2$$

  gegeben, welche sich zu $(2x_0+8)x + 12y + 4 - x_0^2 = 0$ vereinfacht. Diese Gerade soll nun durch $(0,0)$ gehen, also muß $x_0 = \pm 2$ gelten. Man rechnet leicht nach, daß sowohl $\mathbf{C} = (2,4)$ als auch $\mathbf{C} = (-2,4)$ das gewünschte Ergebnis liefern.

- Lösung (b):

  – Sei $\mathbf{C}$ von der Form $\mathbf{C} = (0, y_0)$ mit einer reellen Zahl $y_0 \neq 0$. Dann schneidet der Kreis um $\mathbf{C}$ mit Radius $|y_0|$ die Strecke $\overline{\mathbf{AB}}$ in ihrem Mittelpunkte $(0,0)$. Soll dieser Kreis auch die Strecke $\overline{\mathbf{AC}}$ in ihrem Mittelpunkte schneiden, dann muß gelten

  $$\frac{1}{2}\sqrt{9+y_0^2} = |y_0|.$$

  Also folgt $9 + y_0^2 = 4y_0^2$ und somit auch $y_0^2 = 3$. Man sieht leicht, daß sowohl $\mathbf{C} = (0, \sqrt{3})$ als auch $\mathbf{C} = (0, -\sqrt{3})$ das gewünschte liefern.