

## Übungsblatt 12 (Bonusblatt)

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

**Aufgabe 1.** In der euklidischen Ebene  $\mathbb{E}^2$  betrachten wir die Punkte  $\mathbf{M} = (3, 5)$  und  $\mathbf{A} = (15, 10)$  und den Kreis  $K = K(\mathbf{M}, \overline{\mathbf{MA}})$ . Untersuchen Sie für jede der Geraden

(a)  $\mathbf{g} = (-2, -7) + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}$ , (b)  $\mathbf{h} = (-4, 22) + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$ , (c)  $\mathbf{k} = (-11, -10) + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ob sie eine Passante, Tangente oder Sekante von  $K$  ist und berechnen Sie gegebenenfalls die Schnittpunkte der Geraden mit  $K$ . (10 Punkte)

**Aufgabe 2.** (a) Sei  $\square_{\mathbf{ABCD}}$  ein einfaches Viereck in  $\mathbb{E}^2$ , dessen Eckpunkte auf einem Kreis mit Radius  $r$  liegen und dessen Diagonalen  $\overline{\mathbf{AC}}$  und  $\overline{\mathbf{BD}}$  sich senkrecht schneiden. Zeigen Sie die Gleichung

$$|\overline{\mathbf{AB}}|^2 + |\overline{\mathbf{BC}}|^2 + |\overline{\mathbf{CD}}|^2 + |\overline{\mathbf{AD}}|^2 = 8r^2. \quad (4 \text{ Punkte})$$

(b) Sei  $\square_{\mathbf{ABCD}}$  ein einfaches Viereck in  $\mathbb{E}^2$  mit Eckpunkten auf einem Kreis  $K$ . Sei  $\mathbf{S}$  der Schnittpunkt der Diagonalen  $\overline{\mathbf{AC}}$  und  $\overline{\mathbf{BD}}$  und seien  $\overline{\mathbf{AD}}$  und  $\overline{\mathbf{BC}}$  nicht parallel mit Schnittpunkt  $\mathbf{R}$ . Sei außerdem der Mittelpunkt  $\mathbf{M}$  von  $K$  in  $\overline{\mathbf{AB}}$  enthalten. Zeigen Sie, dass  $\overline{\mathbf{RS}} \perp \overline{\mathbf{AB}}$ . (3 Punkte)

(c) In  $\mathbb{E}^2$  sei ein Dreieck  $\Delta_{\mathbf{ABC}}$  gegeben. Der Radius  $r$  des Umkreises von  $\Delta_{\mathbf{ABC}}$  betrage  $\sqrt{8}$ . Außerdem gelte  $|\overline{\mathbf{AB}}| = 4$  und  $\angle_{\mathbf{CAB}} = 60^\circ$ . Berechnen Sie  $\angle_{\mathbf{ACB}}$  und  $|\overline{\mathbf{BC}}|$ . (3 Punkte)

**Aufgabe 3.** (a) Gegeben seien zwei Sekanten  $\mathbf{g}_{\mathbf{S},\vec{v}}$ ,  $\mathbf{g}_{\mathbf{S},\vec{w}}$  eines Kreises  $K$  durch einen gemeinsamen Punkt  $\mathbf{S}$  im Äusseren des Kreises. Die Schnittpunkte von  $K$  mit  $\mathbf{g}_{\mathbf{S},\vec{v}}$  seien  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ , diejenigen von  $\mathbf{g}_{\mathbf{S},\vec{w}}$  mit  $K$  seien  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$ . Zeigen Sie mit dem Ähnlichkeitssatz und dem Kreiswinkelsatz, dass  $|\overline{\mathbf{SA}_1}| |\overline{\mathbf{SA}_2}| = |\overline{\mathbf{SB}_1}| |\overline{\mathbf{SB}_2}|$ . (5 Punkte)

(b) Sei  $\Delta_{\mathbf{ABC}}$  ein spitzwinkliges Dreieck in  $\mathbb{E}^2$ . Die Punkte  $\mathbf{H}_c \in \overline{\mathbf{AB}}$ ,  $\mathbf{H}_a \in \overline{\mathbf{BC}}$  und  $\mathbf{H}_b \in \overline{\mathbf{AC}}$  seien die Fußpunkte der Höhe von  $\mathbf{C}$  auf  $\overline{\mathbf{AB}}$ , von  $\mathbf{A}$  auf  $\overline{\mathbf{BC}}$  bzw. von  $\mathbf{B}$  auf  $\overline{\mathbf{AC}}$ . Der Schnittpunkt  $\mathbf{H}$  der Höhen teilt die Strecken  $\overline{\mathbf{AH}_a}$ ,  $\overline{\mathbf{BH}_b}$  und  $\overline{\mathbf{CH}_c}$  in zwei Abschnitte. Beweisen Sie, dass das Produkt der Längen dieser Abschnitte für alle drei Höhen gleich ist. (5 Punkte)

**Aufgabe 4.** (a) Sei  $\mathbf{A} = (-4, -2)$  und  $\mathbf{B} = (4, -2)$ . Bestimmen Sie einen Punkt  $\mathbf{C} \in \mathbb{E}^2$  mit der Eigenschaft, dass die Punkte  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  die Eckpunkte eines Dreiecks in  $\mathbb{E}^2$  sind, dessen Umkreismittelpunkt der Nullpunkt und dessen Euler-Gerade parallel zur Seite  $\overline{\mathbf{AB}}$  ist. (5 Punkte)

(b) Sei  $\mathbf{A} = (-3, 0)$  und  $\mathbf{B} = (3, 0)$ . Bestimmen Sie einen Punkt  $\mathbf{C} \in \mathbb{E}^2$  mit der Eigenschaft, dass die Punkte  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  nicht kollinear sind und  $\mathbf{C}$  der Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises des Dreiecks  $\Delta_{\mathbf{ABC}}$  ist. (5 Punkte)

- Abgabe der Lösungen bis Montag, 15.07.2019, um 10:00 Uhr in das Fach 170 im Lichthof neben dem Haupteingang.
- Bitte versehen Sie jedes Blatt Ihrer Lösung mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer, dem Termin und den Namen des Tutors der Übungsgruppe in der Ihre Lösungen zurückgegeben werden sollen.
- Gruppenabgaben von maximal drei Studierenden sind möglich.
- Bitte tackern Sie Ihre abgegebenen Lösungen zusammen.
- Die erste Klausur findet am Montag, 29.07.2019, zwischen 12:00 und 14:00 Uhr statt.
- Die Studienleistung erbringen Sie
  - durch regelmäßige und aktive Teilnahme an den Übungen,
  - durch Erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.