Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Übungsblatt 11

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 1. (a) In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ sind die Punkte $\mathbf{D} = (3, -3)$, $\mathbf{E} = (4, 4)$ und $\mathbf{M} = (1, -2)$ gegeben. Zeigen Sie, dass es genau ein Dreieck $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ in $\mathbb{E}^2$ gibt, für das $\mathbf{D}$ und $\mathbf{E}$ die Mittelpunkte der Seiten $\overline{\mathbf{AB}}$ bzw. $\overline{\mathbf{BC}}$ sind und $\mathbf{M}$ der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist, und berechnen Sie die Eckpunkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ dieses Dreiecks.

(5 Punkte)

(b) In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ sind die Punkte

$$\mathbf{D} = \left(\frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right), \quad \mathbf{E} = \left(\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}\right) \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = (3, 1)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass es genau ein gleichschenkliges Dreieck $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ in $\mathbb{E}^2$ mit Basis $\overline{\mathbf{BC}}$ gibt, für das $\mathbf{M}$ der Mittelpunkt des Inkreises K_{in} ist und $\mathbf{D}$ und $\mathbf{E}$ die Berührpunkte von K_{in} mit $\mathbf{AB}$ bzw. $\mathbf{AC}$ sind, und berechnen Sie die Eckpunkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ dieses Dreiecks. (5 Punkte)

Aufgabe 2. Seien $\mathbf{m}_a, \mathbf{m}_b, \mathbf{m}_c$ die Mittelsenkrechten eines Dreiecks $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ in $\mathbb{E}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{m}_a = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2 : 2\langle \mathbf{P}, \mathbf{C} - \mathbf{B}\rangle = ||\mathbf{C}||^2 - ||\mathbf{B}||^2\},$$

und geben Sie analoge Beschreibungen für $\mathbf{m}_b$ und $\mathbf{m}_c$ an. (5 Punkte)

(b) Leiten Sie aus (a) ab, dass ein Punkt $\mathbf{P}$ der auf zwei der Mittelsenkrechten $\mathbf{m}_a, \mathbf{m}_b, \mathbf{m}_c$ liegt, auch auf der dritten Mittelsenkrechten liegt. (5 Punkte)

Aufgabe 3. Gegeben sei ein Dreieck $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ in $\mathbb{E}^2$. Bezeichne $\mathbf{H}_c \in \mathbf{AB}$ den Höhenfußpunkt von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{AB}$ und sei

$$\mathbf{Q} = \cot(\beta)\cot(\gamma)\mathbf{A} + \cot(\alpha)\cot(\gamma)\mathbf{B} + \cot(\alpha)\cot(\beta)\mathbf{C}.$$

Beweisen Sie, dass

(a) $\mathbf{H}_c = \frac{\cos(\beta)\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}\mathbf{A} + \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}\mathbf{B}$, (4 Punkte)

(b) $\cot(\beta)\cot(\gamma) + \cot(\alpha)\cot(\gamma) + \cot(\alpha)\cot(\beta) = 1$, (3 Punkte)

(c) $\langle \mathbf{Q}, \mathbf{C} - \mathbf{B}\rangle = \langle \mathbf{A}, \mathbf{C} - \mathbf{B}\rangle$. (3 Punkte)

Aufgabe 4. (a) Sei $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ ein Dreieck in $\mathbb{E}^2$ und sei $\mathbf{D} \in \overline{\mathbf{AB}}$ der Berührpunkt des Ankreises an die Seite $\overline{\mathbf{AB}}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{|\overline{\mathbf{AD}}|}{|\overline{\mathbf{BD}}|} = \frac{\tan(\alpha/2)}{\tan(\beta/2)}.$$

(5 Punkte)

(b) Beweisen Sie, dass der Umkreismittelpunkt und der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ in $\mathbb{E}^2$ genau dann übereinstimmen, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

(5 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Abgabe der Lösungen bis Montag, 08.07.2019, um 10:00 Uhr in das Fach 170 im Lichthof neben dem Haupteingang.
- Bitte versehen Sie jedes Blatt Ihrer Lösung mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer, dem Termin und den Namen des Tutors der Übungsgruppe in der Ihre Lösungen zurückgegeben werden sollen.
- Gruppenabgaben von maximal drei Studierenden sind möglich.
- Bitte tackern Sie Ihre abgegebenen Lösungen zusammen.
- Die erste Klausur findet am Montag, 29.07.2019, zwischen 12:00 und 14:00 Uhr statt.
- Die Studienleistung erbringen Sie
  - durch regelmäßige und aktive Teilnahme an den Übungen,
  - durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.