Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Übungsblatt 8

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 1 (aus den Klausuren 2018). Sei $\mathcal{E} = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ mit paarweise verschiedenen Elementen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ und sei $\mathcal{G}_0 = \{\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}, \{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}, \{\mathbf{A}, \mathbf{D}\}\}$.

(a) Beweisen Sie, dass es genau eine Teilmenge $\mathbf{h} \subseteq \mathcal{E}$ mit der Eigenschaft gibt, dass das Paar $(\mathcal{E}, \mathcal{G}_0 \cup \{\mathbf{h}\})$ eine Inzidenzebene ist. (3 Punkte)

(b) Untersuchen Sie, ob für diese Menge $\mathbf{h}$ die Inzidenzebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}_0 \cup \{\mathbf{h}\})$ das Parallelenaxiom erfüllt. (3 Punkte)

Aufgabe 2 (aus den Klausuren 2018). Sei $\mathcal{E} = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2 : ||\mathbf{P}|| \neq 1\}$, sei $\mathcal{G}$ das System aller Durchschnitte $\mathbf{g} \cap \mathcal{E}$, wobei $\mathbf{g} \subseteq \mathbb{E}^2$ eine euklidische Gerade ist, und sei die dreistellige Relation $R \subseteq \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dadurch definiert, dass $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) \in R$ für drei Punkte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 \in \mathcal{E}$ genau dann gilt, wenn $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ kollinear sind und

$$(||\mathbf{P}_1|| - 1)(||\mathbf{P}_3|| - 1)\langle \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 \rangle < 0.$$

Für $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3 \in \mathcal{E}$, $\mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_3$, definieren wir die Strecke

$$\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3} := \{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3\} \cup \{\mathbf{P}_2 \in \mathcal{E} : (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) \in R\}.$$

(a) Skizzieren Sie die Strecken $\overline{\mathbf{AB}}$, $\overline{\mathbf{AC}}$ und $\overline{\mathbf{BC}}$ (bzgl. der oben definierten Relation R) für $\mathbf{A} = (0, -2)$, $\mathbf{B} = (0, 0)$ und $\mathbf{C} = (0, 2)$. (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$, zusammen mit der Relation R, das Anordnungsaxiom **(A3)** nicht erfüllt. (3 Punkte)

Aufgabe 3 (aus den Klausuren 2018). Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ drei nicht kollineare Punkte einer Hilbertebene und sei $\mathbf{P} \in \overline{\mathbf{AB}} \setminus \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$. Dabei gelte $\overline{\mathbf{AC}} \equiv \overline{\mathbf{BC}}$ und $\angle_{\mathbf{ACP}} \equiv \angle_{\mathbf{BCP}}$. Beweisen Sie:

(a) $\overline{\mathbf{AP}} \equiv \overline{\mathbf{BP}}$. (3 Punkte)

(b) Die Winkel $\angle_{\mathbf{APC}}$ und $\angle_{\mathbf{BPC}}$ sind rechte Winkel. (3 Punkte)

Aufgabe 4 (aus den Klausuren 2018). In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte $\mathbf{A} = (2, 1)$, $\mathbf{B} = (-6, 3)$, $\mathbf{M} = (-3, -2)$, $\mathbf{P} = (4, 9)$ und den Kreis $K = K(\mathbf{M}, \overline{\mathbf{MA}})$ mit Mittelpunkt $\mathbf{M}$ durch $\mathbf{A}$.

(a) Überprüfen Sie, dass $\mathbf{B} \in K$, und untersuchen Sie, ob der Punkt $\mathbf{P}$ auf der Tangente von K durch $\mathbf{B}$ liegt. (3 Punkte)

(b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Tangenten von K durch $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$. (3 Punkte)

Aufgabe 5. (a) In der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ betrachten wir die Punkte $\mathbf{M} = (3, 5)$, $\mathbf{A} = (15, 10)$ und den Kreis $K = K(\mathbf{M}, \overline{\mathbf{MA}})$. Zeigen Sie, dass durch den Punkt $\mathbf{C} = (15, 15)$ genau zwei Tangenten von K verlaufen, und berechnen Sie die Berührpunkte dieser beiden Tangenten mit K. (4 Punkte)

(b) Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ eine Hilbertebene. Zeigen Sie, dass zu jeder Geraden $\mathbf{g} \in \mathcal{G}$ und jedem Punkt $\mathbf{A} \in \mathcal{G}$ mit $\mathbf{A} \notin \mathbf{g}$ genau ein Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{A}$ existiert, der $\mathbf{g}$ als Tangente hat. (2 Punkte)

(c) Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ eine Hilbertebene. Zeigen Sie, dass jeder Kreis $K \subseteq \mathcal{E}$ unendlich viele Punkte enthält. (2 Punkte)

Aufgabe 6. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ eine Hilbertebene.

(a) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1 \in \mathcal{E}$ mit $\mathbf{B}_0$ der Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{AB}_1}$, $\mathbf{C}_1$ der Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{AC}_0}$ und $\mathbf{B}_0|\mathbf{C}_0|\mathbf{B}_1$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}|\mathbf{C}_1|\mathbf{B}_0$. (3 Punkte)

Sei nun $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ sogar eine absolute Geometrie (d.h. es gelten zusätzlich die Vollständigkeitsaxiome **(V1)** und **(V2)**). Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{E}$ mit $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{C}$. Betrachten Sie die Folge $(\mathbf{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}$, iterativ definiert durch die Bedingungen, dass $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}$ und $\mathbf{C}_{n+1}$ der Mittelpunkt von $\overline{\mathbf{AC}_n}$ ist. Sei $(\mathbf{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge aus $\mathcal{E}$, iterativ definiert durch die Bedingungen $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}$, $\mathbf{A}|\mathbf{B}_n|\mathbf{B}_{n+1}$ und $\overline{\mathbf{B}_n\mathbf{B}_{n+1}} \equiv \overline{\mathbf{AB}}$.

(b) Zeigen Sie, dass es eine kleinste Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, mit der Eigenschaft, dass $\mathbf{A}|\mathbf{C}|\mathbf{B}_{n_0}$. (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie (z.B. durch Induktion über die Zahl n_0 aus (b)), dass ein $m_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mathbf{A}|\mathbf{C}_{m_0}|\mathbf{B}$. (3 Punkte)

- Abgabe der Lösungen bis **Montag, 17.06.2019, um 10:00 Uhr** in das Fach 170 im Lichthof neben dem Haupteingang.
- Bitte versehen Sie jedes Blatt Ihrer Lösung mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer, dem Termin und den Namen des Tutors der Übungsgruppe in der Ihre Lösungen zurückgegeben werden sollen.
- Gruppenabgaben von maximal drei Studierenden sind möglich.
- Bitte tackern Sie Ihre abgegebenen Lösungen zusammen.
- Die erste Klausur findet am Montag, 29.07.2019, zwischen 12:00 und 14:00 Uhr statt.
- Die Studienleistung erbringen Sie
  - durch regelmäßige und aktive Teilnahme an den Übungen,
  - durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.