Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Lösungen zu Aufgabe 3 und 4 von Übungsblatt 7

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 3. (a) Sei $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2$ mit $||\vec{\mathbf{v}}|| = 1$, $c \in \mathbb{R}$ und $s_{\mathbf{g}} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ die Spiegelung in der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ an der Geraden $\mathbf{g} = \{\mathbf{P} \in \mathbb{E}^2 : \langle \mathbf{P}, \vec{\mathbf{v}} \rangle = c\}$. Für alle $\mathbf{X} \in \mathbb{E}^2$ ist also $s_{\mathbf{g}}(\mathbf{X})$ der Spiegelungspunkt von $\mathbf{X}$ an $\mathbf{g}$. Zeigen Sie, dass

$$s_{\mathbf{g}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - 2(\langle \mathbf{X}, \vec{\mathbf{v}} \rangle - c)\vec{\mathbf{v}}.$$

(5 Punkte)

(b) Sei $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$ und $\tau_{\vec{\mathbf{u}}} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ die *Translation* um $\vec{\mathbf{u}}$, d.h. $\tau_{\vec{\mathbf{u}}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \vec{\mathbf{u}}$ für alle $\mathbf{X} \in \mathbb{E}^2$. Zeigen Sie, dass es zwei euklidische Geraden $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \subseteq \mathbb{E}^2$ gibt, so dass $\tau_{\vec{\mathbf{u}}} = s_{\mathbf{g}_1} \circ s_{\mathbf{g}_2}$.

(5 Punkte)

- Lösung (a):
  - Sei $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ die Abbildung

    $$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - 2(\langle \mathbf{X}, \vec{\mathbf{v}} \rangle - c)\vec{\mathbf{v}}.$$

    Wir müssen zeigen, dass $s_{\mathbf{g}}(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X})$ für alle $\mathbf{X} \in \mathbb{E}^2$.
  - Für $\mathbf{X} \in \mathbf{g}$ gilt $s_{\mathbf{g}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ aber auch $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ (da $\langle \mathbf{X}, \vec{\mathbf{v}} \rangle - c = 0$), also $s_{\mathbf{g}}(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X})$.
  - Sei nun $\mathbf{X} \notin \mathbf{g}$. Um $s_{\mathbf{g}}(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X})$ zu zeigen, müssen wir das Folgende nachweisen:
    1. $\mathbf{X}f(\mathbf{X}) \perp \mathbf{g}$,
    2. $\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{X} + f(\mathbf{X})) \in \mathbf{g}$.

    Beachte dabei, dass $\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{X} + f(\mathbf{X}))$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{\mathbf{X}f(\mathbf{X})}$ ist.
  - zu 1.: Der Richtungsvektor $\overrightarrow{\mathbf{X}f(\mathbf{X})} = f(\mathbf{X}) - \mathbf{X}$ ist gegeben durch

    $$\overrightarrow{\mathbf{X}f(\mathbf{X})} = -2(\langle \mathbf{X}, \vec{\mathbf{v}} \rangle - c)\vec{\mathbf{v}},$$

    ist also vom Nullvektor verschieden und proportional zu $\vec{\mathbf{v}}$. Da $\vec{\mathbf{v}}$ senkrecht auf $\mathbf{g}$ steht, ist somit $\mathbf{X}f(\mathbf{X})$ senkrecht zu $\mathbf{g}$.
  - zu 2.: Wir berechnen

    $$\mathbf{M} = \mathbf{X} - (\langle \mathbf{X}, \vec{\mathbf{v}} \rangle - c)\vec{\mathbf{v}}.$$

    Damit folgt

    $$\langle \mathbf{M}, \vec{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{X}, \vec{\mathbf{v}} \rangle - (\langle \mathbf{X}, \vec{\mathbf{v}} \rangle - c)\langle \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle = c,$$

    also $\mathbf{M} \in \mathbf{g}$
  - Damit sind wir fertig: Es gilt $s_{\mathbf{g}}(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X})$ für alle $\mathbf{X} \in \mathbb{E}^2$.
- Lösung (b):
  - Setze

    $$\vec{\mathbf{v}} := \frac{\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||}.$$

– Betrachte zwei parallele Geraden

$$\mathbf{g}_1 = \{\mathbf{P} \in \mathbb{E}^2 : \langle \mathbf{P}, \vec{\mathbf{v}} \rangle = c_1\}, \quad \mathbf{g}_2 = \{\mathbf{P} \in \mathbb{E}^2 : \langle \mathbf{P}, \vec{\mathbf{v}} \rangle = c_2\}.$$

– Nach Teil (a) gilt dann für alle $\mathbf{X} \in \mathbb{E}^2$

$$\begin{aligned}(s_{\mathbf{g}_1} \circ s_{\mathbf{g}_2})(\mathbf{X}) &= s_{\mathbf{g}_2}(\mathbf{X}) - 2(\langle s_{\mathbf{g}_2}(\mathbf{X}), \vec{\mathbf{v}} \rangle - c_1)\vec{\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{X} - 2(\langle \mathbf{X}, \vec{\mathbf{v}} \rangle - c_2)\vec{\mathbf{v}} - 2(\langle \mathbf{X} - 2(\langle \mathbf{X}, \vec{\mathbf{v}} \rangle - c_2)\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle - c_1)\vec{\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{X} - 2\langle \mathbf{X}, \vec{\mathbf{v}} \rangle \vec{\mathbf{v}} + 2c_2\vec{\mathbf{v}} - 2(\langle \mathbf{X}, \vec{\mathbf{v}} \rangle - 2(\langle \mathbf{X}, \vec{\mathbf{v}} \rangle - c_2) - c_1)\vec{\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{X} + 2(c_1 - c_2)\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{X} + \frac{2(c_1 - c_2)}{||\vec{\mathbf{u}}||}\vec{\mathbf{u}}.\end{aligned}$$

Setzen wir zum Beispiel $c_2 = 0$ und $c_1 = ||\vec{\mathbf{u}}||/2$ erhalten wir $\tau_{\vec{\mathbf{u}}} = s_{\mathbf{g}_1} \circ s_{\mathbf{g}_2}$ wie gewünscht.

Aufgabe 4. In einer Hilbertebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot, \equiv)$ seien eine Gerade $\mathbf{g}$ und zwei Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{E} \setminus \{\mathbf{g}\}$ mit $(\mathbf{A}, \mathbf{B})|_{\mathbf{g}}$ gegeben. Für die Lotfußpunkte $\mathbf{L_A}$ und $\mathbf{L_B}$ von $\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{B}$ auf $\mathbf{g}$ gelte $\mathbf{L_A} \neq \mathbf{L_B}$. Die Spiegelungspunkte von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ an $\mathbf{g}$ seien $\mathbf{A'}$ bzw. $\mathbf{B'}$. Außerdem sei $\mathbf{S}$ der Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{AL_B}$ und $\mathbf{BL_A}$ und $\mathbf{S'}$ der Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{A'L_B}$ und $\mathbf{B'L_A}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Strecken $\overline{\mathbf{AB}}$ und $\overline{\mathbf{A'B'}}$ sind kongruent. (5 Punkte)

(b) Der Punkt $\mathbf{S'}$ ist der Spiegelungspunkt von $\mathbf{S}$ an $\mathbf{g}$. (5 Punkte)

- Lösung (a):

  – Die Dreiecke $\Delta_{\mathbf{L_A L_B B}}$ und $\Delta_{\mathbf{L_A L_B B'}}$ sind nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent. Entsprechend folgt $\overline{\mathbf{L_A B}} \equiv \overline{\mathbf{L_A B'}}$ und $\angle_{\mathbf{BL_A L_B}} \equiv \angle_{\mathbf{B'L_A L_B}}$. Mit Winkelsubtraktion folgt daraus $\angle_{\mathbf{AL_A B}} \equiv \angle_{\mathbf{A'L_A B'}}$. Da zusätzlich $\overline{\mathbf{AL_A}} \equiv \overline{\mathbf{L_A A'}}$ gilt, folgt mit dem Kongruenzsatz SWS die gewünschte Kongruenz $\overline{\mathbf{AB}} \equiv \overline{\mathbf{A'B'}}$

- Lösung (b):

  – Der Punkt $\mathbf{B}$ liegt im Inneren des Winkels $\angle_{\mathbf{AL_A L_B}}$, denn $\mathbf{B} \in [\mathbf{A}]_{\mathbf{g}}$ nach Annahme, und $\mathbf{B} \in [\mathbf{L_B}]_{\mathbf{AL_A}}$ folgt aus der Tatsache, daß $\mathbf{AL_A}$ und $\mathbf{BL_B}$ die Gerade $\mathbf{g}$ jeweils senkrecht schneiden, so daß sich $\mathbf{AL_A}$ und $\mathbf{BL_B}$ nicht schneiden. Die letzte Aussage folgt wiederum daraus, daß es laut Vorlesung keine Dreiecke mit zwei rechten Winkeln gibt. Nun folgt aus dem Beweis von Satz 2.4.7, daß die Gerade $\mathbf{L_A B}$ die Strecke $\overline{\mathbf{AL_B}}$ schneidet. Aus diesen Überlegungen folgt nun, daß es den Schnittpunkt $\mathbf{S}$ tatsächlich gibt, und daß $(\mathbf{A}, \mathbf{S})|_{\mathbf{g}}$ gilt.

  Wie in Teil (a) folgen aus dem Kongruenzsatz SWS die Winkelkongruenzen $\angle_{\mathbf{BL_A L_B}} \equiv \angle_{\mathbf{L_B L_A B'}}$ und $\angle_{\mathbf{L_A L_B A}} \equiv \angle_{\mathbf{L_A L_B A'}}$. Aus unseren obigen Überlegungen folgt aber insbesondere $\mathbf{S} \in \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{L_A}, \mathbf{B})$ (und analog $\mathbf{S} \in \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{L_B}, \mathbf{A})$). Das bedeutet $\angle_{\mathbf{BL_A L_B}} = \angle_{\mathbf{SL_A L_B}}$ und $\angle_{\mathbf{AL_B L_A}} = \angle_{\mathbf{SL_B L_A}}$, sowie analog $\angle_{\mathbf{L_B L_A B'}} = \angle_{\mathbf{L_B L_A S'}}$ und $\angle_{\mathbf{L_A L_B A'}} = \angle_{\mathbf{L_A L_B S'}}$. Nach dem Kongruenzsatz WSW sind also die Dreiecke $\Delta_{\mathbf{SL_A L_B}}$ und $\Delta_{\mathbf{S'L_A L_B}}$ kongruent, also gilt insbesondere $\overline{\mathbf{L_A S}} \equiv \overline{\mathbf{L_A S'}}$ sowie $\overline{\mathbf{L_B S}} \equiv \overline{\mathbf{L_B S'}}$. Die gewünschte Aussage folgt somit aus Satz 3.5.9.