Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Lösung zur Aufgabe 2 von Übungsblatt 6

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 2. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot), \equiv)$ eine Hilbert-Ebene und $\mathbf{S} \in \mathcal{E}$. Wir definieren die *Punktspiegelung* $\Phi_{\mathbf{S}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ wie folgt: Es gelte

$$\Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{S}) = \mathbf{S} \quad \text{und} \quad \Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}' \quad \text{für } \mathbf{P} \neq \mathbf{S},$$

wobei $\mathbf{P}'$ der (nach **(K1)** und Satz 3.2.2) eindeutig bestimmte Punkt mit $\mathbf{P}|\mathbf{S}|\mathbf{P}'$ und $\overline{\mathbf{SP}} \equiv \overline{\mathbf{SP}'}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$ genau dann, wenn $\mathbf{P} = \mathbf{S}$. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi_{\mathbf{S}}(\Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P})) = \mathbf{P}$ für alle $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$. (2 Punkte)

(c) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{E}$ verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathbf{A}' = \Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{A})$ und $\mathbf{B}' = \Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{B})$ verschieden sind und $\overline{\mathbf{A}'\mathbf{B}'} \equiv \overline{\mathbf{AB}}$ gilt. (3 Punkte)

(d) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{E}$ in allgemeiner Lage. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathbf{A}' = \Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{A})$, $\mathbf{B}' = \Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{B})$ und $\mathbf{C}' = \Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{C})$ in allgemeiner Lage sind und $\angle_{\mathbf{ABC}} \equiv \angle_{\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}'}$ gilt. (3 Punkte)

- Lösung (a):
  - Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{S}$, so gilt nach Definition $\Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$.
  - Gilt umgekehrt $\mathbf{P} \neq \mathbf{S}$, so gilt nach Definition $\Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}'$ mit $\mathbf{P}|\mathbf{S}|\mathbf{P}'$ und $\overline{\mathbf{PS}} \equiv \overline{\mathbf{P}'\mathbf{S}}$. Insbesondere folgt $\mathbf{P}' \neq \mathbf{P}$, also $\Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P}) \neq \mathbf{P}$.
- Lösung (b):
  - Für $\mathbf{P} = \mathbf{S}$ gilt offensichtlich $\Phi_{\mathbf{S}}(\Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P})) = \Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$.
  - Sei $\mathbf{P} \neq \mathbf{S}$, so dass $\mathbf{P}' = \Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P})$ mit $\mathbf{P}|\mathbf{S}|\mathbf{P}'$ und $\overline{\mathbf{PS}} \equiv \overline{\mathbf{P}'\mathbf{S}}$. Da $\mathbf{P}' \neq \mathbf{S}$ gilt dann $\mathbf{P}'' = \Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P}')$, wobei $\mathbf{P}''$ der durch $\mathbf{P}'|\mathbf{S}|\mathbf{P}''$ und $\overline{\mathbf{P}'\mathbf{S}} \equiv \overline{\mathbf{P}''\mathbf{S}}$ eindeutig bestimmte Punkt ist. Wegen $\mathbf{P}, \mathbf{P}'' \in \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{S}, \mathbf{P})$ und $\overline{\mathbf{PS}} \equiv \overline{\mathbf{P}''\mathbf{S}}$ folgt nach Satz 3.2.2, dass $\mathbf{P} = \mathbf{P}''$. Also folgt $\mathbf{P} = \Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P}') = \Phi_{\mathbf{S}}(\Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P}))$.
- Lösung (c):
  - Wegen $\Phi_{\mathbf{S}}^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ ist $\Phi_{\mathbf{S}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Bijektion mit inverser Abbildung $\Phi_{\mathbf{S}}^{-1} = \Phi_{\mathbf{S}}$. Insbesondere folgt aus $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ auch $\mathbf{A}' \neq \mathbf{B}'$.
  - Sei zunächst einer von beiden Punkten $\mathbf{A}$ oder $\mathbf{B}$ gleich $\mathbf{S}$, o.B.d.A. $\mathbf{A} = \mathbf{S}$. Dann ist $\mathbf{A} = \mathbf{S} = \mathbf{A}'$ und wir erhalten

$$\overline{\mathbf{A}'\mathbf{B}'} = \overline{\mathbf{SB}'} \equiv \overline{\mathbf{SB}} = \overline{\mathbf{AB}}.$$

– Sei nun $\mathbf{A} \neq \mathbf{S} \neq \mathbf{B}$. Zunächst seien $\mathbf{A}, \mathbf{S}, \mathbf{B}$ kollinear. Dann gilt $\mathbf{A}|\mathbf{S}|\mathbf{B}$ oder $\mathbf{S}|\mathbf{A}|\mathbf{B}$ oder $\mathbf{S}|\mathbf{B}|\mathbf{A}$. Im Fall $\mathbf{A}|\mathbf{S}|\mathbf{B}$ folgt auch $\mathbf{A}'|\mathbf{S}|\mathbf{B}'$. Wegen $\overline{\mathbf{AS}} \equiv \overline{\mathbf{A'S}}$ und $\overline{\mathbf{BS}} \equiv \overline{\mathbf{B'S}}$ folgt mit **(K3)**, dass $\overline{\mathbf{A'B'}} \equiv \overline{\mathbf{AB}}$. Im Fall $\mathbf{S}|\mathbf{A}|\mathbf{B}$ folgt auch $\mathbf{S}|\mathbf{A}'|\mathbf{B}'$: Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus der folgenden allgemeinen Aussage:

  Seien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}'$ Punkte einer Hilbertebene mit $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{P}|\boldsymbol{B}$ und $\overline{\boldsymbol{AB}} \equiv \overline{\boldsymbol{A'B'}}$. Dann gibt es einen eindeutigen Punkt $\boldsymbol{P}'$ mit $\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{P}'|\boldsymbol{B}'$ und $\overline{\boldsymbol{A'P'}} \equiv \overline{\boldsymbol{AP}}$ (und somit auch $\overline{\boldsymbol{B'P'}} \equiv \overline{\boldsymbol{BP}}$ nach der Streckensubtraktion (Korollar 3.2.3)).

  Wir zeigen diese Aussage: Sei $\mathbf{P}' \in \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{A}', \mathbf{B}')$ der eindeutige Punkt mit $\overline{\mathbf{A'P'}} \equiv \overline{\mathbf{AP}}$. Falls $\mathbf{P}' = \mathbf{B}'$ folgt $\overline{\mathbf{AB}} \equiv \overline{\mathbf{A'B'}} \equiv \overline{\mathbf{AP}}$ und damit aber $\mathbf{P} = \mathbf{B}$ – ein Widerspruch. Nun nehmen wir an, dass $\mathbf{A}'|\mathbf{B}'|\mathbf{P}'$. Sei $\mathbf{P}''$ der eindeutige Punkt mit $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{P}''$ und $\overline{\mathbf{BP''}} \equiv \overline{\mathbf{B'P'}}$. Wegen $\overline{\mathbf{AB}} \equiv \overline{\mathbf{A'B'}}$ folgt somit $\overline{\mathbf{AP''}} \equiv \overline{\mathbf{A'P'}} \equiv \overline{\mathbf{AP}}$. Dann gilt $\mathbf{P} = \mathbf{P}''$ – ein Widerspruch. Also gilt $\mathbf{A}'|\mathbf{P}'|\mathbf{B}'$ und die Aussage ist bewiesen.

  Aus $\mathbf{S}|\mathbf{A}|\mathbf{B}$ und $\mathbf{S}|\mathbf{A}'|\mathbf{B}'$ und der Streckensubtraktion (Korollar 3.2.3) folgt somit $\overline{\mathbf{A'B'}} \equiv \overline{\mathbf{AB}}$. Der Fall $\mathbf{S}|\mathbf{B}|\mathbf{A}$ geht analog.

– Wenn $\mathbf{A}, \mathbf{S}, \mathbf{B}$ nicht kollinear sind, sind auch $\mathbf{A}', \mathbf{S}, \mathbf{B}'$ nicht kollinear (durch nochmalige Anwendung von $\Phi_\mathbf{S}$ auf das Punktetripel $\mathbf{A}', \mathbf{S}, \mathbf{B}'$, unter Benutzung von $\Phi_\mathbf{S}^2 = \mathrm{Id}_\mathcal{E}$, würde nämlich ansonsten die Kollinearität von $\mathbf{A}, \mathbf{S}, \mathbf{B}$ folgen). Wegen $\overline{\mathbf{SA}} \equiv \overline{\mathbf{SA'}}$, $\overline{\mathbf{SB}} \equiv \overline{\mathbf{SB'}}$ und $\angle_{\mathbf{ASB}} \equiv \angle_{\mathbf{A'SB'}}$ (nach dem Gegenwinkelsatz 3.3.5) folgt mit dem SWS-Kongruenzsatz die Kongruenz der Dreiecke $\Delta_{\mathbf{ASB}}$ und $\Delta_{\mathbf{A'SB'}}$. Insbesondere folgt $\overline{\mathbf{AB}} \equiv \overline{\mathbf{A'B'}}$.

- Lösung (d):

  – Wir zeigen zunächst, dass $\mathbf{P} \in \mathbf{AB}$ impliziert, dass $\mathbf{P}' := \Phi_\mathbf{S}(\mathbf{P}) \in \mathbf{A'B'}$. Mit anderen Worten: Die Abbildung $\Phi_\mathbf{S} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ bildet Geraden auf Geraden ab. Wenn $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{S}$ kollinear sind, ist das klar weil dann $\mathbf{AB} = \mathbf{A'B'}$. Seien nun $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{S}$ nicht kollinear. Sei o.B.d.A. $\mathbf{P} \in \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Im letzten Abschnitt der Lösung zu Teil (c) haben wir gezeigt, dass die Dreiecke $\Delta_{\mathbf{ABS}}$ und $\Delta_{\mathbf{A'B'S}}$ kongruent sind. Insbesondere folgt

  $$\angle_{\mathbf{SA'B'}} \equiv \angle_{\mathbf{SAB}} = \angle_{\mathbf{SAP}}.$$

  Genauso sind auch $\Delta_{\mathbf{APS}}$ und $\Delta_{\mathbf{A'P'S}}$ kongruent. Insbesondere folgt

  $$\angle_{\mathbf{SA'P'}} \equiv \angle_{\mathbf{SAP}}.$$

  Also gilt $\angle_{\mathbf{SA'B'}} \equiv \angle_{\mathbf{SA'P'}}$. Außerdem haben wir

  $$[\mathbf{P}]_{\mathbf{A'S}} = [\mathbf{B}]_{\mathbf{A'S}} \quad \text{und somit} \quad [\mathbf{P}']_{\mathbf{A'S}} = [\mathbf{B}']_{\mathbf{A'S}}.$$

  Aus der Eindeutigkeit der Winkelabtragung (ausgehend vom Punkt $\mathbf{A}'$ entlang des Strahls $\vec{\mathbf{S}}(\mathbf{A}', \mathbf{S})$) folgt dann $\mathbf{P}' \in \vec{\mathbf{S}}(\mathbf{A}', \mathbf{B}')$, insbesondere also $\mathbf{P}' \in \mathbf{A'B'}$.

  – Wir haben gezeigt, dass $\Phi_\mathbf{S} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ Geraden auf Geraden abbildet und damit, wegen $\Phi_\mathbf{S}^2 = \mathrm{Id}_\mathcal{E}$, auch Tripel von nicht kollinearen Punkten auf Tripel nicht kollinearer Punkte. Sind also $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ nicht kollinear, so sind auch die Bildpunkte $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$ unter der Abbildung $\Phi_\mathbf{S} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ nicht kollinear. Aus Teil (c) folgt

  $$\overline{\mathbf{AB}} \equiv \overline{\mathbf{A'B'}}, \ \overline{\mathbf{AC}} \equiv \overline{\mathbf{A'C'}} \quad \text{und} \quad \overline{\mathbf{BC}} \equiv \overline{\mathbf{B'C'}}.$$

  Nach dem SSS-Kongruenzsatz sind $\Delta_{\mathbf{ABC}}$ und $\Delta_{\mathbf{A'B'C'}}$ kongruent, insbesondere gilt also $\angle_{\mathbf{ABC}} \equiv \angle_{\mathbf{A'B'C'}}$.