Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Lösung zur Aufgabe 4 von Übungsblatt 5

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt"

Sommersemester 2019

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie, dass durch $\mathfrak{C}(z) := \frac{z-i}{z+i}$ eine bijektive Abbildung $\mathfrak{C} : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{D}^2$ definiert ist, wobei $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe ist. (5 Punkte)

(b) Betrachten Sie die folgenden Metriken $\mathrm{d}_{\mathbb{H}^2} : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathrm{d}_{\mathbb{D}^2} : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{H}^2$ bzw. $\mathbb{D}^2$ gegeben durch

$$\mathrm{d}_{\mathbb{H}^2}(z,w) := \log\left(\frac{|z-\bar{w}| + |z-w|}{|z-\bar{w}| - |z-w|}\right) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{d}_{\mathbb{D}^2}(p,q) := \log\left(\frac{|1-p\bar{q}| + |p-q|}{|1-p\bar{q}| - |p-q|}\right)$$

für $z, w \in \mathbb{H}^2$ und $p, q \in \mathbb{D}^2$. Überprüfen Sie, dass die Abbildung $\mathfrak{C} : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{D}^2$ aus Teil (a) die Abstände erhält, d.h., zeigen Sie, dass $\mathrm{d}_{\mathbb{D}^2}(\mathfrak{C}(z), \mathfrak{C}(w)) = \mathrm{d}_{\mathbb{H}^2}(z,w)$ für alle $z, w \in \mathbb{H}^2$. (5 Punkte)

- Lösung (a):
  - Offenbar ist die Abbildung $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$ für $z \in \mathbb{H}^2$ (also insbesondere $z \neq -i$) wohldefiniert. Außderdem gilt

    $$(*) \quad \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{D}^2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-i|^2 < |z+i|^2 \Leftrightarrow 2i(z-\bar{z}) < 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{H}^2$$

    so dass also $\mathfrak{C}(\mathbb{H}^2) \subseteq \mathbb{D}^2$.
  - Sei nun $y \in \mathbb{D}^2$. Um ein $z \in \mathbb{C}$ zu finden mit $\frac{z-i}{z+i} = y$, lösen wir die Gleichung $z - i = yz + yi$ nach z auf. Beachte, dass wegen $(*)$ dann automatisch $z \in \mathbb{H}^2$ gilt. Wir erhalten, dass $z - i = yz + yi$ die eindeutige Lösung $z = i\frac{1+y}{1-y}$ hat. Insgesamt folgt, daß $y \mapsto i\frac{1+y}{1-y}$ die Umkehrabbildung von $\mathfrak{C}$ ist.
- Lösung (b):
  - Setze

    $$A := \left|1 - \frac{z-i}{z+i} \cdot \frac{\overline{w}+i}{\overline{w}-i}\right| + \left|\frac{z-i}{z+i} - \frac{w-i}{w+i}\right|$$

    und

    $$B := \left|1 - \frac{z-i}{z+i} \cdot \frac{\overline{w}+i}{\overline{w}-i}\right| - \left|\frac{z-i}{z+i} - \frac{w-i}{w+i}\right|$$

    Dann ist $\mathrm{d}_{\mathbb{D}^2}(\mathfrak{C}(z), \mathfrak{C}(w)) = \log \frac{A}{B}$. Nun berechnet man

    $$A = \left|\frac{-2iz + 2i\overline{w}}{(z+i)(\overline{w}-i)}\right| + \left|\frac{2iz - 2iw}{(z+i)(w+i)}\right| = \alpha\big(|z-\overline{w}| + |z-w|\big),$$

    mit $\alpha := \frac{2}{(z+i)(w+i)} = \frac{2}{(z+i)(\overline{w}-i)}$. Dieselbe Rechnung zeigt

    $$B = \alpha\big(|z-\overline{w}| - |z-w|\big).$$

    Insgesamt folgt $\mathrm{d}_{\mathbb{D}^2}(\mathfrak{C}(z), \mathfrak{C}(w)) = \log \frac{A}{B} = \log\left(\frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|}\right) = \mathrm{d}_{\mathbb{H}^2}(z,w)$, wie gewünscht.