

Übungsblatt 5

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 1. In der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 betrachten wir die Punkte $\mathbf{A} = (2, 3)$, $\mathbf{B} = (2, 1)$, $\mathbf{C} = (5, 4)$, $\mathbf{D} = (1, 7)$ und $\mathbf{E} = (-1, -2)$.

- (a) Berechnen Sie die Winkelmaße $\angle_{\mathbf{ABC}}$ und $\angle_{\mathbf{DAE}}$ der Winkel $\angle_{\mathbf{ABC}}$ und $\angle_{\mathbf{DAE}}$ und stellen Sie fest, ob $\angle_{\mathbf{ABC}} \equiv \angle_{\mathbf{DAE}}$ gilt. (5 Punkte)
- (b) Bestimmen Sie den Punkt \mathbf{F} mit der Eigenschaft, dass $\angle_{\mathbf{ABF}} \equiv \angle_{\mathbf{DAE}}$, $\overline{\mathbf{BF}} \equiv \overline{\mathbf{BC}}$ und $(\mathbf{C}, \mathbf{F})|_{\mathbf{AB}}$. (5 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{E} = \mathbb{Q}^2$ und sei $\mathcal{G} = \{\mathbf{g} \cap \mathcal{E} : \mathbf{g} \subseteq \mathbb{E}^2 \text{ euklidische Gerade mit } |\mathbf{g} \cap \mathcal{E}| \geq 2\}$. Ferner seien $\cdot|\cdot|$ und \equiv die Einschränkungen der Zwischenrelation bzw. der Strecken- und Winkelkongruenz von \mathbb{E}^2 auf \mathcal{E} . Dann ist $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|, \equiv)$ eine angeordnete Inzidenzebene.

- (a) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{Q}^2$ in allgemeiner Lage. Zeigen Sie, dass $\tan(\angle_{\mathbf{ABC}}) \in \mathbb{Q}$, falls $\angle_{\mathbf{ABC}}$ ungleich $\frac{\pi}{2}$. (5 Punkte)
- (b) Untersuchen Sie, ob das Kongruenzaxiom **(K4)** von $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|, \equiv)$ erfüllt wird. (5 Punkte)

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Metrik $d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem \mathbb{R}^2 gegeben durch $d_\infty(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \max\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\}$ für $\mathbf{P} = (p_1, p_2)$, $\mathbf{Q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$. In der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 definieren wir wie folgt eine Streckenkongruenz. Für zwei Strecken $\overline{\mathbf{AB}}$ und $\overline{\mathbf{CD}}$ gilt $\overline{\mathbf{AB}} \equiv \overline{\mathbf{CD}}$ genau dann, wenn $d_\infty(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = d_\infty(\mathbf{C}, \mathbf{D})$. Für die Kongruenz von Winkeln benutzen wir den üblichen Kongruenzbegriff in \mathbb{E}^2 (d.h. zwei Winkel sind genau dann kongruent, wenn ihre Winkelmaße übereinstimmen). Zeigen Sie, dass die angeordnete Inzidenzebene \mathbb{E}^2 zusammen mit dieser Strecken- und Winkelkongruenz \equiv

- (a) den Kongruenzaxiomen **(K1)**, **(K2)** und **(K3)** genügt, (5 Punkte)
- (b) das Kongruenzaxiom **(K6)** nicht erfüllt. (5 Punkte)

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie, dass durch $\mathfrak{C}(z) := \frac{z-i}{z+i}$ eine bijektive Abbildung $\mathfrak{C} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ definiert ist, wobei $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe ist. (5 Punkte)

- (b) Betrachten Sie die folgenden Metriken $d_{\mathbb{H}^2} : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $d_{\mathbb{D}^2} : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf \mathbb{H}^2 bzw. \mathbb{D}^2 gegeben durch

$$d_{\mathbb{H}^2}(z, w) := \log \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right) \quad \text{bzw.} \quad d_{\mathbb{D}^2}(p, q) := \log \left(\frac{|1 - p\bar{q}| + |p - q|}{|1 - p\bar{q}| - |p - q|} \right)$$

für $z, w \in \mathbb{H}^2$ und $p, q \in \mathbb{D}^2$. Überprüfen Sie, dass die Abbildung $\mathfrak{C} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ aus Teil (a) die Abstände erhält, d.h., zeigen Sie, dass $d_{\mathbb{D}^2}(\mathfrak{C}(z), \mathfrak{C}(w)) = d_{\mathbb{H}^2}(z, w)$ für alle $z, w \in \mathbb{H}^2$. (5 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Abgabe der Lösungen bis Donnerstag, 16.05.2019, um 08:10 Uhr in das Fach 170 im Lichthof neben dem Haupteingang.
- Bitte versehen Sie jedes Blatt Ihrer Lösung mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer, dem Termin und den Namen des Tutors der Übungsgruppe in der Ihre Lösungen zurückgegeben werden sollen.
- Gruppenabgaben von maximal drei Studierenden sind möglich.
- Bitte tackern Sie Ihre abgegebenen Lösungen zusammen.
- Die Studienleistung erbringen Sie
 - durch regelmäßige und aktive Teilnahme an den Übungen,
 - durch Erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.