Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Lösung zur Aufgabe 4 von Übungsblatt 4

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 4. Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ drei nicht kollineare Punkte einer angeordneten Inzidenzebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot)$.

(a) Seien $\mathbf{A}^*, \mathbf{C}^* \in \mathcal{E}$ mit $\mathbf{A}^*|\mathbf{B}|\mathbf{A}$ sowie $\mathbf{C}^*|\mathbf{B}|\mathbf{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}}) = [\mathbf{A}^*]_{\mathbf{BC}} \cup [\mathbf{C}^*]_{\mathbf{BA}}.$$

(5 Punkte)

(b) Seien $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathrm{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}})$, $\mathbf{P} \neq \mathbf{Q}$. Zeigen Sie, dass ein Punkt $\mathbf{R} \in \mathcal{E}$ existiert, so dass $\overline{\mathbf{PR}} \cup \overline{\mathbf{RQ}} \subseteq \mathrm{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}})$. (5 Punkte)

- Lösung (a):

  - Für $U \subseteq \mathcal{E}$ bezeichne $U^c = \mathcal{E} \setminus U$ im Folgenden das Komplement. Wir erhalten

$$\begin{aligned}([\mathbf{A}^*]_{\mathbf{BC}} \cup [\mathbf{C}^*]_{\mathbf{BA}})^c &= [\mathbf{A}^*]^c_{\mathbf{BC}} \cap [\mathbf{C}^*]^c_{\mathbf{BA}} = (\mathbf{BC} \cup [\mathbf{A}]_{\mathbf{BC}}) \cap (\mathbf{AB} \cup [\mathbf{C}]_{\mathbf{BA}})\\ &= (\mathbf{BC} \cap \mathbf{AB}) \cup (\mathbf{BC} \cap [\mathbf{C}]_{\mathbf{BA}}) \cup ([\mathbf{A}]_{\mathbf{BC}} \cap \mathbf{AB}) \cup ([\mathbf{A}]_{\mathbf{BC}} \cap [\mathbf{C}]_{\mathbf{BA}})\\ &= \{\mathbf{B}\} \cup (\vec{S}(\mathbf{B}, \mathbf{C}) \setminus \{\mathbf{B}\}) \cup (\vec{S}(\mathbf{B}, \mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{B}\}) \cup \mathrm{Int}(\angle_{\mathbf{ABC}})\\ &= \angle_{\mathbf{ABC}} \cup \mathrm{Int}(\angle_{\mathbf{ABC}}) = \mathrm{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}})^c.\end{aligned}$$

  Oben haben wir die Definitionen der Mengen $\angle_{\mathbf{ABC}}$, $\mathrm{Int}(\angle_{\mathbf{ABC}})$ und $\mathrm{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}})$ aus der Vorlesung benutzt. Außerdem haben wir beim zweiten Gleichheitszeichen benutzt, dass $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^*$ auf verschiedenen Seiten von $\mathbf{BC}$ liegen (wegen $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{A}^*$) und genauso $\mathbf{C}$ und $\mathbf{C}^*$ auf verschiedenen Seiten von $\mathbf{BA}$ liegen (wegen $\mathbf{C}|\mathbf{B}|\mathbf{C}^*$). Desweiteren haben wir beim vierten Gleichheitszeichen

$$\mathbf{BC} \cap [\mathbf{C}]_{\mathbf{BA}} = \vec{S}(\mathbf{B}, \mathbf{C}) \setminus \{\mathbf{B}\} \quad \text{und} \quad \mathbf{AB} \cap [\mathbf{A}]_{\mathbf{BC}} = \vec{S}(\mathbf{B}, \mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{B}\}$$

  benutzt. Wir zeigen die erste von diesen Gleichungen, die zweite folgt dann analog: Betrachte $\mathbf{P} \in \mathbf{BC}$ mit $\mathbf{P} \neq \mathbf{B}$ und $\mathbf{P} \neq \mathbf{C}$. Dann gilt nach **(A3)** genau eine der drei Aussagen

$$\mathbf{B}|\mathbf{P}|\mathbf{C}, \quad \mathbf{B}|\mathbf{C}|\mathbf{P} \quad \text{oder} \quad \mathbf{C}|\mathbf{B}|\mathbf{P}. \tag{1}$$

  Offensichtlich tritt $\mathbf{C}|\mathbf{B}|\mathbf{P}$ genau dann ein, wenn $[\mathbf{P}]_{\mathbf{BA}} \neq [\mathbf{C}]_{\mathbf{BA}}$. Damit gilt also $\mathbf{P} \in [\mathbf{C}]_{\mathbf{BA}}$ genau dann, wenn einer der beiden ersten Fälle in (1) eintritt. Dies ist (nach Definition von $\vec{S}(\mathbf{B}, \mathbf{C})$) genau dann der Fall, wenn $\mathbf{P} \in \vec{S}(\mathbf{B}, \mathbf{C})$.

- Lösung (b):

  - Nach **(A2)** existieren Punkte $\mathbf{A}^*, \mathbf{C}^*$ mit $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{A}^*$ und $\mathbf{C}|\mathbf{B}|\mathbf{C}^*$. Nach dem in Teil (a) gezeigten gilt somit

$$(*) \quad \mathrm{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}}) = [\mathbf{A}^*]_{\mathbf{BC}} \cup [\mathbf{C}^*]_{\mathbf{BA}}.$$

– Sei nun

$$\mathbf{R} \in \mathrm{Int}(\angle_{\mathbf{A^*BC^*}}) = [\mathbf{A}^*]_{\mathbf{BC}} \cap [\mathbf{C}^*]_{\mathbf{BA}}$$

ein beliebiger Punkt.

– Wir zeigen, dass für $\mathbf{P} \in \mathrm{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}})$ stets gilt $\overline{\mathbf{PR}} \subseteq \mathrm{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}})$. Daraus folgt dann natürlich insbesondere $\overline{\mathbf{PR}} \cup \overline{\mathbf{QR}} \subseteq \mathrm{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}})$ für die beiden gegebenen Punkte $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathrm{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}})$. Das $\overline{\mathbf{PR}} \subseteq \mathrm{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}})$ folgt aber direkt aus Aufgabe 3(b): Nach $(*)$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\mathbf{P} \in [\mathbf{A}^*]_{\mathbf{BC}}$. Weil auch $\mathbf{R} \in [\mathbf{A}^*]_{\mathbf{BC}}$ folgt aus Aufgabe 3(b) und $(*)$, dass

$$\overline{\mathbf{PR}} \subseteq [\mathbf{A}^*]_{\mathbf{BC}} \subseteq \mathrm{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}})$$

was zu zeigen war.

– Bemerkung: Wir haben hier tatsächlich eine stärkere Aussage bewiesen als die, die in (b) zu zeigen war. Wir haben nämlich die Existenz eines Punktes $\mathbf{R} \in \mathrm{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}})$ nachgewiesen, so dass für alle $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathrm{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}})$ gilt, dass $\overline{\mathbf{PR}} \cup \overline{\mathbf{RQ}} \subseteq \mathrm{Ext}(\angle_{\mathbf{ABC}})$.