Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Übungsblatt 2

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 1. Bezeichne $\mathbb{E}^2$ das affine Modell der euklidischen Ebene. Betrachten Sie die euklidische Abstandsfunktion $\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sqrt{(A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2}$ für Punkte $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2)$ aus $\mathbb{E}^2$.

(a) Seien $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C} \in \mathbb{E}^2$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{C}$ genau dann gilt, wenn $\mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{C}) = \mathrm{d}(\mathbf{A},\mathbf{B}) + \mathrm{d}(\mathbf{B},\mathbf{C})$.

(b) Seien $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D} \in \mathbb{E}^2$ vier Punkte mit $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{C}$ und $\mathbf{A}|\mathbf{C}|\mathbf{D}$. Zeigen Sie mit (a), dass dann auch $\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{D}$ und $\mathbf{B}|\mathbf{C}|\mathbf{D}$.

(je 5 Punkte)

Aufgabe 2. Betrachten Sie die relativen euklidischen Geometrien $\mathcal{E} := \mathbb{E}^2|_M$ für die Mengen

(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$,

(b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^x \geq y\}$,

zusammen mit der Einschränkung $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{E}\times\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ der Zwischenrelation von $\mathbb{E}^2$. Untersuchen Sie jeweils, welche der Anordnungsaxiome **(A1)**–**(A4)** von $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{Z})$ erfüllt werden. (je 5 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot|\cdot|\cdot)$ eine angeordnete Inzidenzebene und sei $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ beliebig. Betrachten Sie $(\mathcal{E}_0, \mathcal{G}_0)$ mit $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \setminus \{\mathbf{P}\}$ und $\mathcal{G}_0 = \{\mathbf{g} \cap \mathcal{E}_0 : \mathbf{g} \in \mathcal{G}\}$ zusammen mit der Einschränkung $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{E}_0 \times \mathcal{E}_0 \times \mathcal{E}_0$ der Zwischenrelation von $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, \cdot | \cdot | \cdot)$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{E}_0, \mathcal{G}_0)$ eine Inzidenzebene ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{E}_0, \mathcal{G}_0, \mathcal{Z})$ keine angeordnete Inzidenzebene ist.

(je 5 Punkte)

Aufgabe 4. Wir betrachten den Restklassenkörper $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ als eine Gerade auf der die Punkte $0, 1, 2, 3, 4$ liegen. Wir definieren eine dreistellige Relation $\cdot | \cdot | \cdot$ auf $\mathbb{F}_5$: Für $a, b, c \in \mathbb{F}_5$ gelte $a|b|c$ genau dann, wenn $a \neq c$ und $b = 3(a + c)$.

(a) Überprüfen Sie, dass $\cdot | \cdot | \cdot$ den Anordnungsaxiomen **(A1)**–**(A3)** genügt.

(b) Finden Sie $a, b, c, d \in \mathbb{F}_5$ derart, dass $a|b|c$ und $b|c|d$ gilt, aber nicht $a|b|d$.

(je 5 Punkte)

BITTE DIE HINWEISE AUF DER RÜCKSEITE BEACHTEN!

- Abgabe der Lösungen bis Donnerstag, 25.04.2019, um 8 Uhr in das Fach 170 im Lichthof neben dem Haupteingang.
- Bitte versehen Sie jedes Blatt Ihrer Lösung mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer, dem Termin und den Namen des Tutors der Übungsgruppe in der Ihre Lösungen zurückgegeben werden sollen.
- Gruppenabgaben von maximal drei Studierenden sind möglich.
- Bitte tackern Sie Ihre abgegebenen Lösungen zusammen.
- Die erste Klausur findet voraussichtlich am Donnerstag, 25.07.2019, zwischen 13 und 15:30 Uhr statt.
- Die Studienleistung erbringen Sie
  - durch regelmäßige und aktive Teilnahme an den Übungen,
  - durch erreichen von mindestens 40% der insgesamt möglichen Punkte aus allen Aufgabenblättern.