Leibniz-Universität Hannover
Institut für Differentialgeometrie
Prof. Knut Smoczyk, Dr. Otto Overkamp, Dr. Stefan Rosemann

Lösung zur Aufgabe 4 von Übungsblatt 1

zur Vorlesung „Geometrie für das Lehramt“

Sommersemester 2019

Aufgabe 4. (a) Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Inzidenzebene. Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ mindestens drei verschiedene Elemente enthält.

(b) Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Inzidenzebene und enthalte $\mathcal{E}$ mindestens vier verschiedene Elemente. Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ mindestens vier verschiedene Elemente enthält.

(je 5 Punkte)

- Lösung:

  (a) Nach Axiom **(I3)** können wir Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{E}$ finden, die auf keiner gemeinsamen Geraden liegen. Wir zeigen zunächst, dass $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ paarweise verschieden sind. Wir nehmen an, das ist nicht der Fall und unterscheiden zwei Fälle:
  1. Fall: $\mathbf{A} = \mathbf{B} \neq \mathbf{C}$. Nach **(I1)** liegen hier die Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ auf der Geraden $\mathbf{BC}$ – ein Widerspruch!
  2. Fall: $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C}$. Wegen $\mathcal{G} \neq \emptyset$ und nach **(I2)** existieren in $\mathcal{E}$ mindestens zwei verschiedene Punkte. Sei $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ mit $\mathbf{P} \neq \mathbf{A}$. Dann liegen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ auf der Geraden $\mathbf{AP}$ – ein Widerspruch!
  Es folgt, dass die Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ paarweise verschieden sind. Nach **(I1)** können wir die Geraden $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$ und $\mathbf{AC}$ betrachten. Wir zeigen nun, daß die Geraden $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$ und $\mathbf{AC}$ paarweise verschieden sind. Wäre etwa $\mathbf{AB} = \mathbf{BC}$, dann lägen alle Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ auf dieser Geraden, was unserer Wahl der Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ widerspräche. Die Ungleichungen $\mathbf{BC} \neq \mathbf{AC}$ und $\mathbf{AB} \neq \mathbf{AC}$ zeigt man analog.

  (b) Seien wieder $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{E}$ paarweise verschiedene Punkte, die auf keiner gemeinsamen Geraden liegen. Nach Annahme gibt es einen Punkt $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ mit $\mathbf{P} \notin \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.
  Fall 1: Der Punkt $\mathbf{P}$ liegt auf einer der Geraden $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$, oder $\mathbf{AC}$. Nach eventuell notwendiger Umbenennung der Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ dürfen wir annehmen, daß $\mathbf{P}$ auf $\mathbf{AB}$ liegt. Dann ist die Gerade $\mathbf{PC}$ nicht in der Menge $\{\mathbf{AB}, \mathbf{BC}, \mathbf{AC}\}$ enthalten. Offenbar ist $\mathbf{PC} \neq \mathbf{AB}$ (denn $\mathbf{C} \notin \mathbf{AB}$). Wäre $\mathbf{PC} = \mathbf{BC}$, dann würden sich die Geraden $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BC}$ in den Punkten $\mathbf{B}$ und $\mathbf{P}$ schneiden, und da nach Annahme $\mathbf{P} \neq \mathbf{B}$ ist, würde $\mathbf{AB} = \mathbf{BC}$ folgen, was nicht möglich ist (siehe Teil (a)). Analog zeigt man $\mathbf{PC} \neq \mathbf{AC}$. Da wir bereits wissen, daß die Geraden $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$ und $\mathbf{AC}$ paarweise verschieden sind, haben wir nun insgesamt vier Geraden $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{AC}$ und $\mathbf{PC}$ konstruiert.
  Fall 2: Der Punkt $\mathbf{P}$ liegt auf keiner der Geraden $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$, oder $\mathbf{AC}$. Dann sind die Geraden $\mathbf{PA}$, $\mathbf{PB}$ und $\mathbf{PC}$ paarweise verschieden. Weiter ist keine dieser Geraden gleich $\mathbf{AB}$, denn sonst würde $\mathbf{P}$ auf $\mathbf{AB}$ liegen, was nach Annahme nicht der Fall ist. Also haben wir auch hier vier Geraden $\mathbf{PA}$, $\mathbf{PB}$, $\mathbf{PC}$ und $\mathbf{AB}$ konstruiert.